Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 8.2.16

Firma: ....................

**Cognome** .............................. **Nome** .................................... **A.A.** .........

**Matricola** ........................................ **Corso di Laurea** ...............................

| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| Σ | |

## Domanda 1

[4 punti]

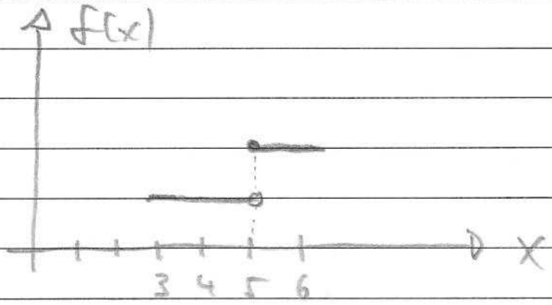
(i) Dare la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x = c$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : [3, 6] \to \mathbb{R}$ continua in $x = 4$ e non continua in $x = 5$.

**Risposta**

(i) $\Rightarrow$ appunti

(ii)




## Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare un punto $c$ del teorema di Lagrange per $f(x) = x^2 + x + 10$ in $[1, 5]$.

**Risposta**

(i) $\Rightarrow$ appunti

(ii) • $f(a) = f(1) = 12$, $f(b) = f(5) = 40 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{40 - 12}{5 - 1} = 7$

• $f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(c) = 2c + 1 \overset{!}{=} 7$

$\Rightarrow c = \frac{7 - 1}{2} = 3$

## Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{n+19}{2n+5}\right)^n}_{=:a_n}$$

### Risoluzione

Applichiamo il criterio della radice: $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+19}{2n+5} = \frac{n\cdot(1+\frac{19}{n})}{2n\cdot(1+\frac{5}{2n})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{19}{n} \to 1}{1+\frac{5}{2n} \to 1}$$

$$\to \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{2} \text{ per } n \to +\infty$$

$$\| \\ q < 1$$

Quindi la serie converge.

## Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$I := \int_0^4 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

### Risoluzione

$$I = \lim_{a\to 0^+} \int_a^4 \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=x^{-2}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \left[-x^{-1}\right]_a^4$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left[-4^{-1} + a^{-1}\right] = +\infty$$

$$= \frac{1}{a} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Quindi l'integrale diverge a $+\infty$

## Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,2)$ alla funzione $f(x,y) = 5 + x^3y^2$.

### Risoluzione

• $P(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)\cdot(y-2)$

• $f(1,2) = 5 + 1^3 \cdot 2^2 = 9$

• $f_x(x,y) = 3x^2 \cdot y^2 \Rightarrow f_x(1,2) = 3 \cdot 1^2 \cdot 2^2 = 12$

• $f_y(x,y) = 2x^3 \cdot y \Rightarrow f_y(1,2) = 2 \cdot 1^3 \cdot 2 = 4$

$\Rightarrow P(x,y) = 9 + 12(x-1) + 4(y-2)$

## Esercizio 4

[5 punti]

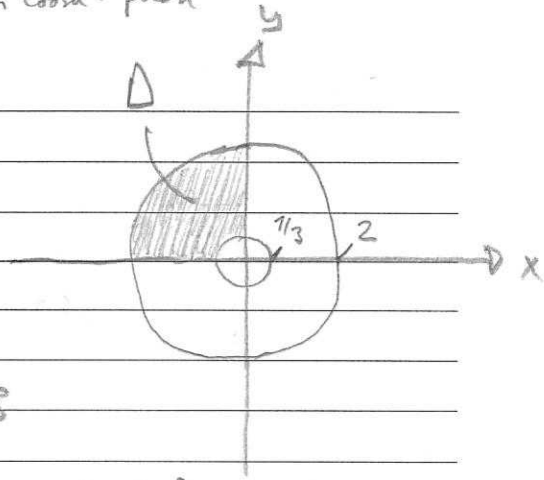
Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{1}{9} < x^2 + y^2 < 4, \quad x < 0, \quad 0 < y\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{x + 4y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$$

$= \rho$ in coord. polari

### Risoluzione

Passaggio alle coordinate polari:

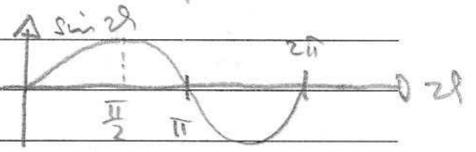



$D$ corrisponde a $D' = \left\{(\rho,\vartheta) \;\middle|\; \begin{array}{l}\rho \in \left(\frac{1}{3}, 2\right) \\ \vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\end{array}\right\}$

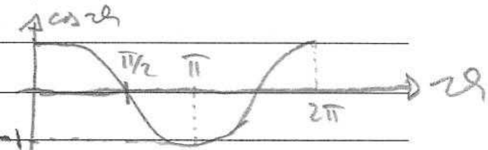
in coord. polari. Quindi risulta

$$I = \int_{1/3}^{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\rho \cdot \cos\vartheta + 4\rho\cdot\sin\vartheta}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho}\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_{1/3}^{2} \rho\, d\rho \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\vartheta + 4\sin\vartheta\, d\vartheta =$$




$$= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{1/3}^{2} \cdot \left[\sin\vartheta - 4\cdot\cos\vartheta\right]_{\pi/2}^{\pi}$$




$$= \frac{4 - 1/9}{2} \cdot \left[\underbrace{0 - 4\cdot(-1) - (1 - 4\cdot 0)}_{=3}\right] = \frac{\frac{36-1}{9}\cdot 3}{2} = \frac{35}{6}$$

## Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^x-1)^3 y^3}{x^6+y^6} + 7y & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**Risoluzione**

Continuità: Poniamo $y = mx \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^3 \cdot m^3 \cancel{x^3}}{x^{\cancel{6}\,3} + m^6 \cdot x^{\cancel{6}\,3}} + \underbrace{7 \cdot m \cdot x}_{\to 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^3}^{\to 1^3 = 1} \cdot m^3}{1+m^6} = \frac{m^3}{1+m^6}$$

dipende da $m \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow$

- $f$ non è continua in $(0,0) \Rightarrow$
- $f$ non è differenziabile in $(0,0)$.

derivabilità:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{0+7\cdot 0-0}{h}}_{=0} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim \frac{0+7\cdot h-0}{h} = 7$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0,0)$ con

$\operatorname{grad} f(0,0) = (0,7)$