Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 9.1.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

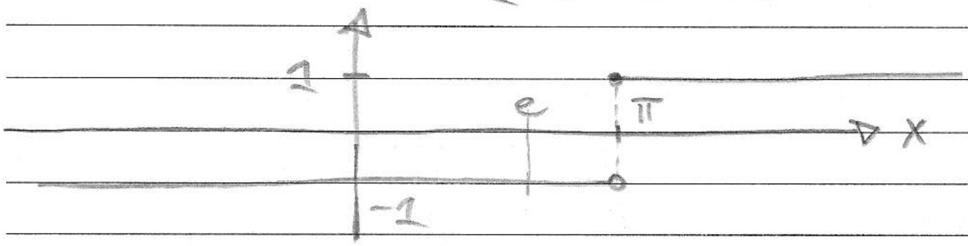
(i) Dare la definizione di continuità di una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di una funzione f che è continua in $x = e$ e discontinua in $x = \pi$.

Risposta

(i) Cfr. appunti

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } x < \pi \\ 1 & \text{se } x \geq \pi \end{cases}$



Domanda 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con continuità tale che $x \cdot f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$. Allora

$\boxed{a}$ $f(x) = -x^2$

$\boxed{b}$ $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale di f

$\boxed{c}$ $x_0 = 0$ è un punto di massimo locale di f

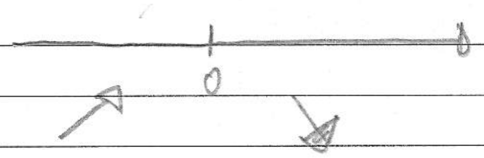
$\boxed{d}$ $f'(0) < 0$

Risposta

Dall'ipotesi segue:

- $f'(x) > 0$ per $x < 0 \Rightarrow f$ strett. crescente per $x < 0$
- $f'(x) < 0$ per $x > 0 \Rightarrow f$ strett. decrescente per $x < 0$

$\Rightarrow$ c)



Esercizio 1

[3 punti]

Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-5}{4n+2}\right)^n$. $=: a_n$

Risoluzione

Si applica il criterio della radice alla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n-5}{4n+2} = \frac{\cancel{n}\cdot(2-5/n)}{\cancel{n}\cdot(4+2/n)} \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = q < 1$

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente

$\Rightarrow$ La serie converge semplicemente.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\overset{(*)}{\lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin(3x) - 6\ln(1+x^2)}{1-\cos(2x^2)}} = -3$$

Risoluzione

- $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$ $\overset{t=2x^2}{\Rightarrow}$

$\cos(2x^2) = 1 - \frac{4x^4}{2} + o(x^4) = 1 - 2x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$1 - \cos(2x^2) = 2x^4 + o(x^4) \sim 2x^4$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ dobbiamo sviluppare il numeratore al 4° ordine:

- $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \to 0$ $\overset{t=3x}{\Rightarrow}$

$2x\cdot\sin(3x) = 2x\cdot\left(3x - \frac{27x^3}{6}\right) + 2x\cdot o(x^3) = 6x^2 - 9x^4 + o(x^4)$ $(x\to 0)$

- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ $\overset{t=x^2}{\Rightarrow}$

$6\cdot\ln(1+t^2) = 6\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = 6x^2 - 3x^4 + o(x^4)$ $(x\to 0)$

$\Rightarrow (*) \sim \frac{\cancel{6x^2} - 9x^4 - \cancel{6x^2} + 3x^4 + o(x^4)}{2x^4} = \frac{-6x^4 + o(x^4)}{2x^4} \sim \underset{\text{limite}}{\underset{\|}{-3}}$

Esercizio 3

[3 punti]

Trovare un versore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $D_v f(1,0) = 0$ dove $f(x,y) = x^2 \cdot e^{\sin(y)}$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione

Visto che f è differenziabile si può usare il teorema del gradiente:

$D_v f(1,0) = D f(1,0) \cdot v.$

Allora $D_v f(x,y) = \left(2x \cdot e^{\sin(y)}, x^2 \cdot \cos(y) \cdot e^{\sin(y)}\right) \Rightarrow$

$D_v (1,0) = \left(2 \cdot e^0, 1^2 \cdot \cos(0) \cdot e^0\right) = (2,1) \Rightarrow$

$D_v f(1,0) = (2,1) \cdot \overbrace{(v_1, v_2)}^{=v} = 2v_1 + v_2$. Quindi

$v = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (così risulta $\|v\| = 1$).

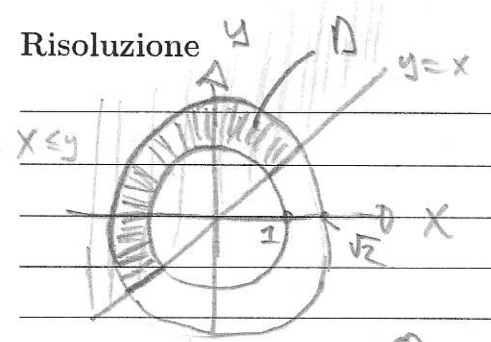
Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq y\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Risoluzione



D corrisponde in coordinate polari a

$D' = \overset{\rho}{[1, \sqrt{2}]} \times \overset{\vartheta}{\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]}$

Quindi risulta (usando che $x^2 + y^2 = \rho^2$)

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \rho \cdot \cos(\rho^2)\, d\vartheta\, d\rho = \int_1^{\sqrt{2}} \rho \cdot \cos(\rho^2)\, d\rho \cdot \underbrace{\int_{\pi/4}^{5\pi/4} 1 \cdot d\vartheta}_{=\pi}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_1^{\sqrt{2}} \overbrace{2\rho \cdot \cos(\rho^2)}^{=(\sin(\rho^2))'}\, d\rho$$

$$\overset{\circledast}{=} \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\rho^2)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\sin(2) - \sin(1)\right)$$

$\circledast$ oppure usare la sostituzione $\rho^2 = r$.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare dominio, eventuali zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

$t = e^x \Leftrightarrow t^2 = e^{2x}$

Dominio: $x \in D(f) \Leftrightarrow e^{2x} - e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow t^2 - t + 1 > 0$.

Però $t^2 - t + 1 = t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \ \forall t$.

$\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$.

Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x + 1 = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^x \Leftrightarrow 2x = x$

$\Leftrightarrow x = 0$.

f': $f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^{2x} - e^x}{\underbrace{e^{2x} - e^x + 1}_{>0}}$. Quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$0 = 2 \cdot e^{2x} - e^x = \underbrace{e^x}_{>0}(2e^x - 1) \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

Inoltre $2 \cdot e^x - 1$ e di conseguenza anche $f'(x)$ cambia segno in $x_0 = -\ln(2)$ segno da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow x_0 = -\ln(2)$ è un pto. di min.

asintoti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(1) = 0 \Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Inoltre da

$f(x) = \ln\left(e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right) = \ln\left(e^{2x}\right) + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$= 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$ segue

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right) = +\infty + \ln(1) = +\infty$.

Inoltre $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)}{x} = 2 =: m$ e

$f(x) - mx = f(x) - 2x = \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) \to 0$ per $x \to +\infty$

Quindi $y = 2x$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Grafico: