Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 9.1.12

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: .... Canale: [A] [B] [C] [D]

Firma: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

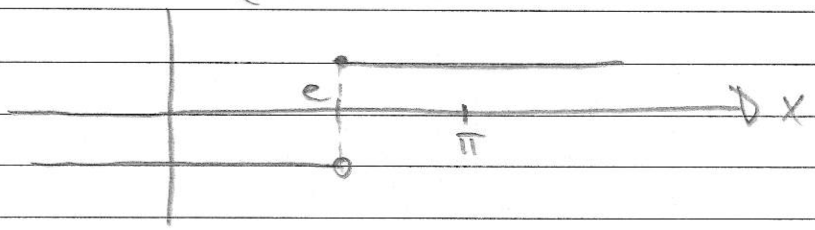
(i) Dare la definizione di continuità di una funzione $g : (a, b) \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di una funzione g che è continua in $x = \pi$ e discontinua in $x = e$.

Risposta

(i) Cfr. appunti

(ii) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < e \\ +1 & \text{se } x \geq e \end{cases}$



Domanda 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con continuità tale che $x \cdot f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Allora

[a] $f(x) = x^2$ $\quad$ [$\cancel{b}$] $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale di f

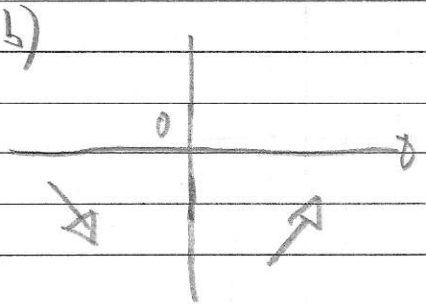
[c] $f'(0) > 0$ $\quad$ [d] $x_0 = 0$ è un punto di massimo locale di f

Risposta

Dalle ipotesi segue:

- $f'(x) < 0$ per $x < 0$ $\Rightarrow$ f è strett. decrescente per $x < 0$
- $f'(x) > 0$ per $x > 0$ $\Rightarrow$ f è strett. crescente per $x > 0$

$\Rightarrow$ b)



Esercizio 1

[3 punti]

Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+5}{5n-2}\right)^n$.

Risoluzione

Con il criterio della radice segue che la serie converge assolutamente, cfr. compito 1-A

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{3\ln(1-2x^2)+6x\sin(x)}{2(\cos(x^2)-1)}}_{= (*)} = +7$$

Risoluzione

Procedendo come nel compito 1-A segue

- $3\ln(1-2x^2) = -6x^2 - 6x^4$
- $6x \cdot \sin(x) = 6x^2 - x^4 + o(x^4)$
- $2 \cdot (\cos(x^2) - 1) = -x^4 + o(x^4)$

$\Rightarrow$

$$(*) = \frac{\cancel{-6x^2} - 6x^4 \cancel{+6x^2} - x^4 + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)} = \frac{-7x^4 + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)} \sim \frac{-7}{-1} = 7$$

limite

Esercizio 3

[3 punti]

Trovare un versore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $D_v f(\frac{\pi}{2}, 1) = 0$ dove $f(x,y) = y^2 \cdot e^{\cos(x)}$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione

Procedendo come nel compito 1-A segue

$$v = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

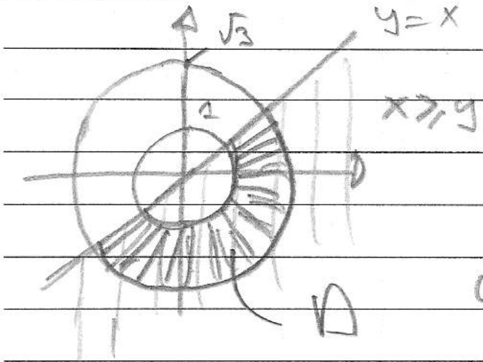
Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 3,\ x \ge y\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Risoluzione



D corrisponde in coordinate polari a

$$\overset{\rho}{\uparrow} \qquad \overset{\vartheta}{\uparrow}$$

$$D' = [1, \sqrt{3}] \times \left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right]$$

Usando che $\left(-\cos(\rho^2)\right)' = 2\rho \cdot \sin(\rho^2)$

si ottiene procedendo come nel compito 1-A:

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \rho \cdot \sin(\rho^2)\, d\vartheta\, d\rho = \ldots = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\cos(1) - \cos(3)\right)$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare dominio, eventuali zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2e^x + 2\right)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Procedendo come nel compito 1-A segue:

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Zeri: $f(x) = 0 \iff x = 0$
- $f'(x) = \dfrac{2e^x - 2}{e^{2x} - 2e^x + 2} = 0 \iff x = 0$ e

  $x_0 = 0$ è un pto. di minimo locale
- $y = 2x$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$
- $y = \ln(2)$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

<u>Grafico:</u>