Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore 9.1.12

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Firma: ....

Domanda 1

[1+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità di una funzione $g : (a, b) \to \mathbb{R}$.

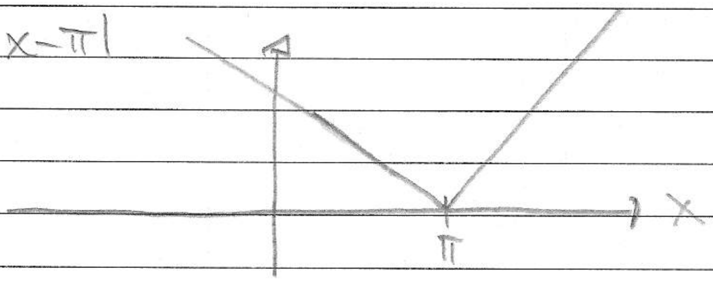
(ii) Fare un esempio di una funzione g che è derivabile in $x = e$ ma non in $x = \pi$.

Risposta

(i)

Cfr. appunti

(ii) $f(x) = |x - \pi|$



Domanda 2

[3 punti]

Sia $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_{-2}^{2} g(x)\, dx = 0$. Allora

a g è dispari

~~b~~ esiste $c \in [-2, 2]$ tale che $g(c) = 0$

c $g(x) = x$ per ogni $x \in [-2, 2]$

d $g(0) = 0$

Risposta

Per il teorema della media $\exists\ c \in [-2,2]$ t.c.

$$0 = \int_{-2}^{2} g(x)\, dx = g(c) \cdot (\underset{b}{2} - \underset{a}{(-2)}) = 4 \cdot g(c)$$

$\Rightarrow g(c) = 0$

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n\left(\ln(1+\tfrac{1}{n}) + \ln(1-\tfrac{1}{n})\right)}_{= a_n}$.

Risoluzione

$|a_n| = \left|\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1-\frac{1}{n})\right| = \left|\ln\left((1+\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{1}{n})\right)\right|$

$= \left|\ln(1-\frac{1}{n^2})\right| \sim \left|-\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ per $n \to +\infty$

Inoltre la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow$ (per il criterio del confronto asintotico) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n|$ converge

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ converge.

Quindi la serie converge assolutamente

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cosh(x) - \frac{\sin(x)}{x}}{x\cdot e^x - x}}_{= (*)} = \frac{2}{3}$$

Risoluzione

• $x\cdot e^x - x = x(e^x - 1) \sim x\cdot x = x^2$ per $x \to 0$

poiché $\frac{e^x-1}{x} \to 1 \ (x\to 0)$

Quindi si deve sviluppare il numeratore fino al 2° ordine:

$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \underbrace{\frac{1}{x}\cdot o(x^3)}_{= o(\frac{1}{x}\cdot x^3) = o(x^2)}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow (*) \sim \frac{\cancel{1} + \frac{x^2}{2} \cancel{-1} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2} = \frac{x^2\overbrace{(\frac{1}{2}+\frac{1}{6})}^{=2/3} + o(x^2)}{x^2}$

$\frac{\frac{2}{3}x^2 + o(x^2)}{x^2} \sim \frac{2/3\, x^2}{x^2} = \underbrace{2/3}_{= \text{limite}}$

Esercizio 3

[3 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = y\cdot\cos^2(x)$ nel punto $(x_0,y_0) = (\frac{\pi}{4}, 1)$.

Risoluzione

$p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$.

Allora: $f(x_0,y_0) = 1\cdot\cos^2(\pi/4) = 1\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$f_x(x,y) = y\cdot 2\cos(x)\cdot(-\sin(x)) \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = -2\overbrace{\cos(\tfrac{\pi}{4})}^{=\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\overbrace{\sin(\tfrac{\pi}{4})}^{=\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

$f_y(x,y) = \cos^2(x) \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = \cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. Quindi

risulta $p(x,y) = \frac{1}{2} - 1(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(y-1)$

$= \frac{\pi}{4} - x + \frac{y}{2}$.

Esercizio 4

[4 punti]

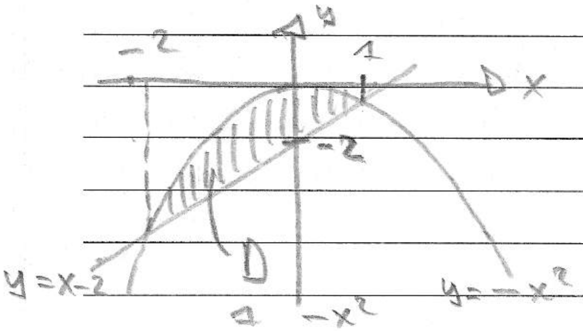
Disegnare il dominio $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2\le y\le -x^2\}$ e calcolarne l'integrale doppio

$$I = \iint_D e^{-x}\,dx\,dy$$

Risoluzione

Calcoliamo prima i punti di intersezione: $x-2=-x^2$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -2 \text{ opp.} \\ 1 \end{cases}$. Quindi otteniamo



$D = \{(x,y) \mid x\in[-2,1],\ x-2\le y\le -x^2\}$.

= y-semplice. Con il teorema di Fubini-Tonelli segue

$I = \int_{-2}^{1}\int_{x-2}^{-x^2} e^{-x}\,dy\,dx = \int_{-2}^{1} e^{-x}\cdot[y]_{x-2}^{-x^2}\,dx$

$= \int_{-2}^{1} \underbrace{(-x^2-x+2)}_{=f}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{=g'}\,dx = \underbrace{(-x^2-x+2)}_{f}\cdot\underbrace{(-e^{-x})}_{g}\Big|_{-2}^{1} + \int_{-2}^{1} \overbrace{\underbrace{(-2x-1)}_{f'}}^{u}\cdot\overbrace{\underbrace{e^{-x}}_{(-g)}}^{v'}\,dx$

$= (+x^2+x-2)\cdot e^{-x}\Big|_{-2}^{+1} + \underbrace{(-2x-1)}_{u}\cdot\underbrace{(-e^{-x})}_{v}\Big|_{-2}^{1} + \int_{-2}^{1} \underbrace{-2\cdot e^{-x}}_{u'\cdot(-v)}\,dx$

$= (+x^2+3x-1)\cdot e^{-x}\Big|_{-2}^{1} + 2e^{-2x}\Big|_{-2}^{1} = (x^2+3x+1)\,e^{-x}\Big|_{-2}^{+1}$

$= (1+3+1)e - ((-2)^2-3\cdot 2+1)\cdot e^{-2} = \underline{5e+e^{-2}}$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln|4 - x^2|$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $x \in D(f) \iff |4-x^2| > 0 \iff x^2 \neq 4 \iff x \neq \pm 2$

Quindi $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$

Simmetrie: $f(x) = f(-x) \Rightarrow f$ è pari.

Zeri: $f(x) = 0 \iff |4-x^2| = 1 \iff 4-x^2 = \pm 1$

$\iff x^2 = 4 \pm 1 \iff x^2 = \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases} \iff x = \pm\sqrt{3}$ opp. $\pm\sqrt{5}$

$f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(4-x^2) & \text{se } x^2 < 4 \iff x \in (-2,2) \\ \ln(x^2-4) & \text{se } x^2 > 4 \iff x < -2 \text{ opp. } x > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{4-x^2} = \dfrac{2x}{x^2-4}\ {<0} & \text{se } x \in (-2,2) \\ \dfrac{2x}{x^2-4} & \text{se } x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \end{cases}$$

$$= \frac{2x}{x^2-4} \quad \forall x \neq \pm 2.$$

Quindi $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Inoltre in $x_0 = 0$ $f'(x)$ cambia segno da "+" a "−" $\Rightarrow x_0 = 0$ è un pto. di max. locale.

Asintoti: $\lim_{x \to \pm 2^{\pm}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = \pm 2$ sono asintoti verticali.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui/orizzontali.

Grafico: