Analisi Matematica 1, Scritto 2-B. Durata della prova: 2 ore 9.1.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

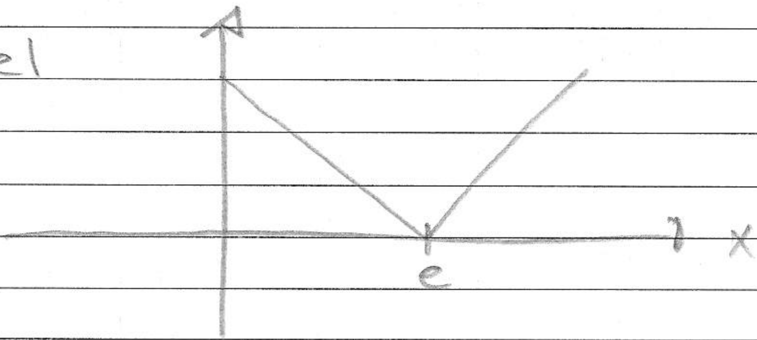
(i) Dare la definizione di derivabilità di una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di una funzione f che è derivabile in $x = \pi$ ma non in $x = e$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) $f(x) = |x - e|$



Domanda 2

[3 punti]

Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$. Allora

$\boxed{a}$ $f(x) = x^3$ per ogni $x \in [-1, 1]$ $\boxed{b}$ $f(0) = 0$

$\boxed{c}$ esiste $x_0 \in [-1, 1]$ tale che $f(x_0) = 0$ $\boxed{d}$ f è dispari

Risposta

Usando il teorema della media segue come nel compito 2-A la risposta c)

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n(\ln(n^2+1)-\ln(n^2-1))}_{=:a_n}$.

Risoluzione

$|a_n| = \ln(n^2+1) + \ln(n^2-1) = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1+2}{n^2-1}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right) \sim \frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$ per $n \to +\infty$.

Inoltre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e quindi dal criterio del confronto asintotico segue che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ converge.

Quindi la serie converge assolutamente.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot e^x - x}{\cos(x) - \frac{\sinh(x)}{x}} = -\frac{3}{2}$$

Risoluzione

Procedendo come nel compito 2-A segue

$x \cdot e^x - x \sim x^2$ per $x \to 0$

$\cos(x) - \frac{\sinh(x)}{x} = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

$= -\frac{2}{3}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{2}{3}x^2$

per $x \to 0$

$\Rightarrow \frac{x \cdot e^x - x}{\cos(x) - \frac{\sinh(x)}{x}} \sim \frac{x^2}{-\frac{2}{3}x^2} = -\frac{3}{2}$

$\|$

limite

Esercizio 3

[3 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = x \cdot \sin^2(y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, \frac{\pi}{4})$.

Risoluzione

Procedendo come nel compito 2-A segue

$$p(x,y) = \frac{x}{2} + y - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 4

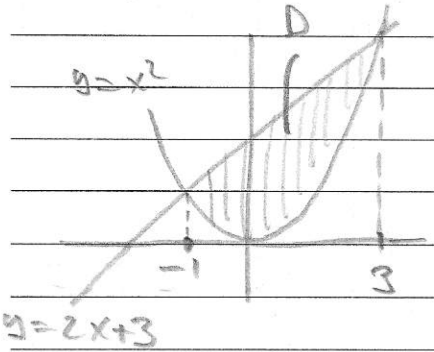
[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x+3\}$ e calcolarne l'integrale doppio

$$I := \iint_D e^{\frac{x}{2}}\, dx\, dy$$

Risoluzione

Si procede come nel compito 2-A:



$$x^2 = 2x+3 \iff x = \left\langle \begin{array}{l} -1 \text{ opp.} \\ 3 \end{array} \right. \implies$$

$$D = \{(x,y) \mid x \in [-1,3],\ x^2 \leq y \leq 2x+3\}$$

$$= y\text{-semplice} \implies (\text{F.T.})$$

$$I = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} e^{\frac{x}{2}}\, dy\, dx = \int_{-1}^{3} (2x+3-x^2) \cdot e^{x/2}\, dx$$

$$= \underset{(2x \text{ int. per parti})}{\ldots\ldots} = -2(x^2-6x+9)\, e^{x/2} \Big|_{-1}^{3}$$

$$= \frac{32}{\sqrt{e}}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln|x^2 - 3|$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Procedendo come nel compito 2-A segue:

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
- f è pari
- zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} \pm\sqrt{2} & \text{opp.} \\ \pm 2 \end{cases}$
- $x_0 = 0$ è l'unico pto. di estr. loc. e questo punto è un max. locale.
- $x = \pm\sqrt{3}$ sono asintoti verticali, non ci sono altri asintoti
- Grafico: