Analisi Matematica, Primo Parziale —1A— Durata della prova: 1 ora **9.11.18**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **A.A.** ....

Domanda 1

[8 punti]

D1	
E1	
E2	
E3	
Σ	

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione

$$(*) \qquad 5^x - 2\cos(x) = 1$$

ammette una soluzione $x = x_0$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ con $f(a)\cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii) $(*) \Leftrightarrow f(x) := 5^x - 2\cos(x) - 1 = 0$. Inoltre

- $f \in C[0,1]$
- $f(0) = 5^0 - 2\cdot\cos(0) - 1 = 1 - 2 - 1 = -2 < 0$
- $f(1) = 5^1 - 2\cdot\cos(1) - 1 \geq 5 - 2 - 1 = 2 > 0$

$\Rightarrow f$ ammette uno zero $x_0 \in [0,1]$.

Esercizio 1

[8 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{k=0}^{+\infty} \overbrace{\left(\sqrt{k^3+5} - \sqrt{k^3}\right)}^{=:\, a_k \geq 0}$$

Risoluzione

$$0 \leq a_k = \frac{\sqrt{k^3+5} - \sqrt{k^3}}{\sqrt{k^3+5} + \sqrt{k^3}} \cdot \left(\sqrt{k^3+5} + \sqrt{k^3}\right) = \frac{\cancel{k^3} + 5 - \cancel{k^3}}{\sqrt{k^3+5} + \sqrt{k^3}}$$

$$\leq \frac{5}{2\cdot\sqrt{k^3}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{per } \alpha = 3/2 > 1$$

Inoltre, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge $\forall \alpha > 1$

$\Rightarrow$ la serie S converge.

Esercizio 2

[8 punti]

Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il numero naturale $2\,n^3 + n$ è divisibile per 3.

Risoluzione

Base: $2 \cdot 1^3 + 1 = 3$ è divisibile per 3 ✓

Passo induttivo: Supponiamo che per un $n \in \mathbb{N}$ $2n^3+n$ sia divisibile per 3. Sotto questa ipotesi è da verificare che anche

$2(n+1)^3 + (n+1)$ è divisibile per 3.

$$2(n^3+3n^2+3n+1) + n+1 = \underbrace{2n^3+n}_{\text{divisibile per 3 per ipotesi}} + \underbrace{3\cdot 2n^2 + 3\cdot 2n + \overbrace{2+1}^{=3}}_{=\,3\cdot(2n^2+2n+1)\ \text{divisibile per 3}}$$

✓

Esercizio 3

[8 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - e^{2x}}{\sin(3x)} =: h(x)$$

Risoluzione

$$h(x) = \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1 + 1 - e^{2x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3x}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \underbrace{\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}}_{\to -1/2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1}} + \frac{\overbrace{1-e^{2x}}^{\to -1}}{2x\cdot \frac{3}{2}\cdot \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1}}$$

$$\to \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \frac{1}{1} + \frac{-1}{3/2} = -\frac{1}{6} - \frac{4}{6} \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$= -\frac{5}{6}$$