Analisi Matematica, Primo Parziale —1B— Durata della prova: 1 ora **9.11.18**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **A.A.** ....

Domanda 1

[8 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione

$$(*) \quad 3\cos(x) - 4^x = 1$$

ammette una soluzione $x = x_0$ nell'intervallo $[0, 1]$.

D1	
E1	
E2	
E3	
Σ	

Risposta

(i) cfr. compito A

(ii) $(*) \Leftrightarrow f(x) := 3\cos(x) - 4^x - 1 = 0$. Inoltre

- $f \in C[0,1]$
- $f(0) = 3\cdot\cos(0) - 4^0 - 1 = 3 - 1 - 1 = 1 > 0$
- $f(1) = 3\cdot\cos(1) - 4^1 - 1 \leq 3 - 4 - 1 = -2 < 0$

$\Rightarrow$ f ammette uno zero $x_0 \in [0,1]$

Esercizio 1

[8 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{k=0}^{+\infty} \overbrace{\left(\sqrt{k^5+3} - \sqrt{k^5}\right)}^{=: a_k \geq 0}$$

Risoluzione

$$0 \leq a_k = \frac{\sqrt{k^5+3} - \sqrt{k^5}}{\sqrt{k^5+3} + \sqrt{k^5}} \cdot \left(\sqrt{k^5+3} + \sqrt{k^5}\right) = \frac{\cancel{k^5} + 3 - \cancel{k^5}}{\sqrt{k^5+3} + \sqrt{k^5}}$$

$$\leq \frac{3}{2\cdot\sqrt{k^5}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{per } \alpha = 5/2 > 1$$

Inoltre, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge $\forall \alpha > 1$

$\Rightarrow$ la serie S converge.

Esercizio 2 **[8 punti]**

Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il numero naturale $n^3 + 2n$ è divisibile per 3.

Risoluzione

Base: $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ è divisibile per 3 ✓

Passo induttivo: Supponiamo che per un certo $n \in \mathbb{N}$ $n^3 + 2n$ sia divisibile per 3. Sotto questa ipotesi è da verificare che $(n+1)^3 + 2(n+1)$ è divisibile per 3.

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = \underbrace{n^3 + 2n}_{\text{divisibile per 3 per ipotesi}} + \underbrace{3n^2 + 3n + 1 + 2}_{= 3\cdot(n^2+n+1) \text{ divisibile per 3}}$$

✓

Esercizio 3 **[8 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{e^{3x} - \cos(\sqrt{x})}{\sin(2x)}}_{=:h(x)}$$

Risoluzione

$$h(x) = \frac{e^{3x} - 1 + 1 - \cos(\sqrt{x})}{\frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2x}$$

$$= \frac{\overbrace{e^{3x}-1}^{\to 1}}{3x \cdot \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1}} + \frac{\overbrace{1 - \cos(\sqrt{x})}^{\to 1/2}}{2 \cdot x \cdot \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1}}$$

per $x \to 0^+$

$$\to \frac{1}{1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1} + \frac{1/2}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$