Analisi Matematica (1) **Durata della prova: 2 ore** **9.9.22**

Firma: .....

Cognome ..... **Nome** .....

Matricola ..... **Corso di Laurea** .....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità di una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Fare l'esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua ma *non* derivabile in $x_0 = \sqrt{e}$.

Risposta

(i) f è continua in $x_0 \in (a,b)$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

(ii) P.e. $f(x) = |x - \sqrt{e}|$, $x \in \mathbb{R}$ è continua ma non derivabile in $x_0 = \sqrt{e}$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange.

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per la funzione $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b), allora

$$\exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(ii)
- $f \in C[1,2]$ è derivabile in $(1,2)$ con $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\ln(2)-\ln(1)}{2-1} = \ln(2)$

Quindi cerchiamo $c \in (1,2)$ t.c. $f'(c) = \frac{1}{c} = \ln(2)$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{\ln(2)}$$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi - \frac{\sin(\pi x)}{x}}{1-\cos(x)} =: \ell$$

Risoluzione

- $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 2° ordine.

- $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$ (ponendo $t = \pi \cdot x$)

$$\frac{\sin(\pi \cdot x)}{x} = \frac{\pi \cdot x}{x} - \frac{\pi^3 \cdot x^3}{6 \cdot x} + \frac{o(\pi^3 \cdot x^3)}{x}$$

$$= \pi - \frac{\pi^3 \cdot x^2}{6} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \pi - \frac{\sin(\pi \cdot x)}{x} = \cancel{\pi} - \cancel{\pi} + \frac{\pi^3 \cdot x^2}{6} + o(x^2) \sim \frac{\pi^3}{6} \cdot x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\pi^3}{6} \cdot x^2}{\frac{1}{2} \cdot x^2} = \frac{\pi^3}{3}$$

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio e calcolare il valore nel caso converga.

$$I = \int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$$

Risoluzione

- $I = \lim_{a \to 2^+} \int_a^{10} (x-2)^{-\frac{1}{3}} \, dx$

- $\int (x-2)^{-\frac{1}{3}} \, dx = (x-2)^{-\frac{1}{3}+1} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{2} \cdot (x-2)^{\frac{2}{3}} + c$

$$\Rightarrow I = \lim_{a \to 2^+} \frac{3}{2} \cdot \left[(x-2)^{\frac{2}{3}} \right]_a^{10}$$

$$= \lim_{a \to 2^+} \frac{3}{2} \cdot \left(8^{2/3} - \underbrace{(a-2)^{2/3}}_{\to 0 \text{ per } x \to 2^+} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(8^{1/3}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2^2 = 6$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente della funzione $f(x,y) := \dfrac{\sinh(x)}{\cos(y)}$ nel punto $\big(\ln(2), \pi\big)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(\ln(2),\pi) + f_x(\ln(2),\pi)\cdot(x-\ln(2))$

$$+ f_y(\ln(2),\pi)\cdot(y-\pi)$$

- $f(\ln(2),\pi) = \dfrac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2\cdot\cos(\pi)} = \dfrac{2-2^{-1}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{\frac{1}{2}-2}{2} = -3/4$

- $f_x(x,y) = \dfrac{\cosh(x)}{\cos(y)} \Rightarrow f_x(\ln(2),\pi) = \dfrac{e^{\ln(2)}+e^{-\ln(2)}}{2\cdot\cos(\pi)} = -5/4$

- $f_y(x,y) = \dfrac{-\sinh(x)}{\cos^2(y)}\cdot(-\sin(y)) \Rightarrow f_y(\ln(2),\pi) = 0$

$(\sin(\pi)=0)$

$\Rightarrow \underline{\underline{p(x,y) = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\cdot(x-\ln(2))}}$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità nel punto $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cosh(x^2)\cdot\ln(1+y^2)}{x^2+y^2} + 2x & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

- Poniamo $x=0$: $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y^2)}{y^2} = 1 \neq f(0,0) = 0$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

- $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \overset{(\ln(1)=0)}{=} \lim_{h\to 0} \dfrac{2h-0}{h} = 2$

- $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \overset{(\cosh(0)=1)}{=} \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{1\cdot\ln(1+h^2)}{h^2} - 0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\cdot \underbrace{\dfrac{\ln(1+h^2)}{h^2}}_{\to 1}$ non converge.

$\Rightarrow$ f non è derivabile in $(0,0)$.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, zeri, eventuali asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, Zeri: $f(x)=0 \iff x^2=0 \iff x=0$.

Asintoti: $\cdot \lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \frac{4}{2-2^\pm} = \frac{4}{0^\mp} = \mp\infty \Rightarrow x=2$ asint. verticale

$\cdot \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty \Rightarrow$ possibili asintoti obliqui.

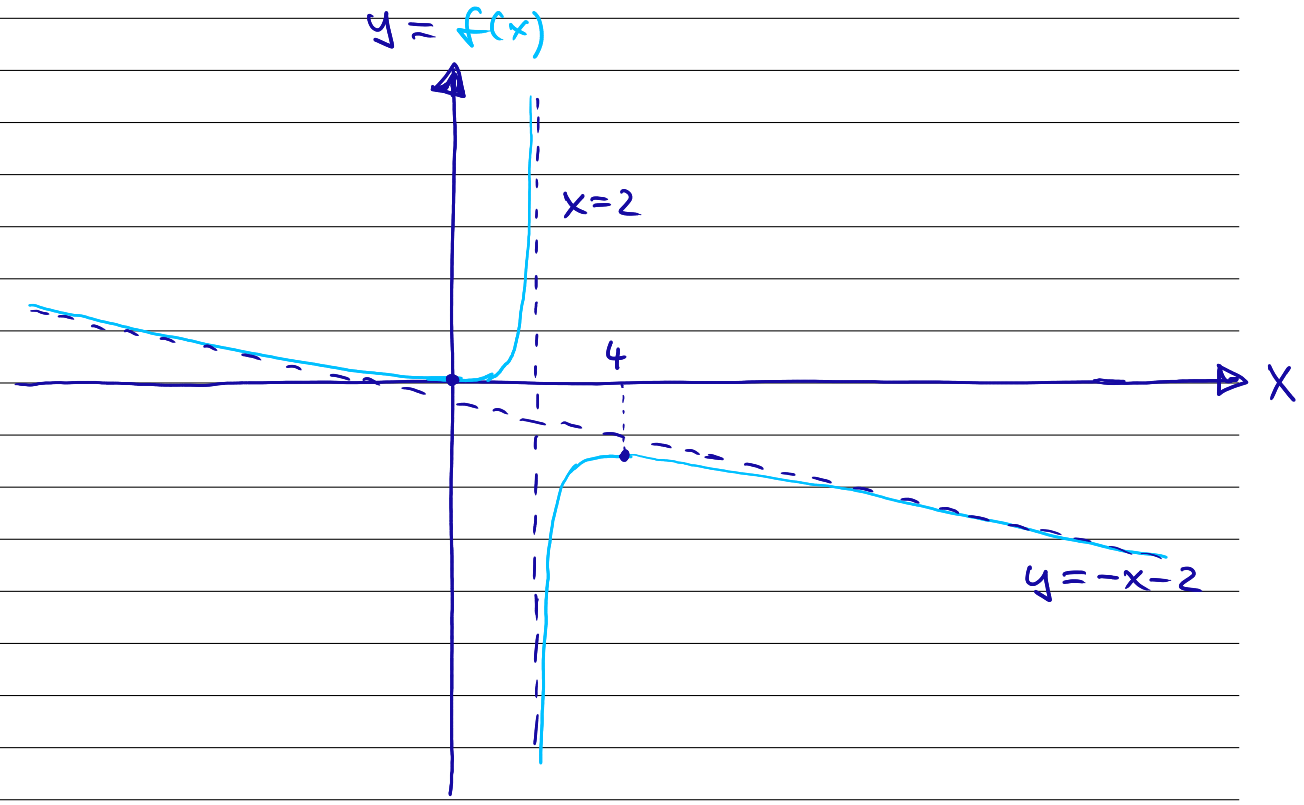
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{-x^2+2\cdot x} = -1 = m.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - m\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2-x} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}{2-x} = -2 = q$$

$\Rightarrow y = -x-2$ asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$.

$\cdot$ Studio $f'(x) = \frac{(2-x)\cdot 2x - (-1)\cdot x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2\cdot x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{x\cdot(4-x)}{(2-x)^2}$ >0

$=0 \iff x=0$ oppure $x=4$

Inoltre $f'(x)$ cambia segno in

- $x=0$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow x=0$ è un pto. di minimo loc.
- $x=4$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow x=4$ è un pto. di massimo loc.