Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 9.1.17

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione a_n crescente.

(ii) Dare un esempio di una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente se

$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Per esempio $a_n = \frac{3n}{n+1}$ converge a $l = 3$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = x^2 + 6x + 2$ nell'intervallo $[1, 3]$.

Risposta

(i) Sia $f \in C[a,b]$ derivabile in (a,b). Allora

esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(ii) $f \in C[1,3]$ ed è derivabile in $(1,3)$. Inoltre

• $f'(x) = 2x+6 \Rightarrow f'(c) = 2c+6$

• $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3^2+6\cdot 3+2-(1^2+6\cdot 1+2)}{2} = \frac{29-9}{2} = 10$

Quindi $f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \Leftrightarrow 2c+6 = 10 \Leftrightarrow c = \frac{10-6}{2} = 2$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+n^5}{161+n^2+n^6} =: a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Risoluzione

- $2+n^5 \sim n^5$
- $161+n^2+n^6 \sim n^6$

$\Rightarrow \frac{2+n^5}{161+n^2+n^6} \sim \frac{n^5}{n^6} = \frac{1}{n}$.

principio di sostituzione

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+n^5}{161+n^2+n^6}$ diverge a $+\infty$

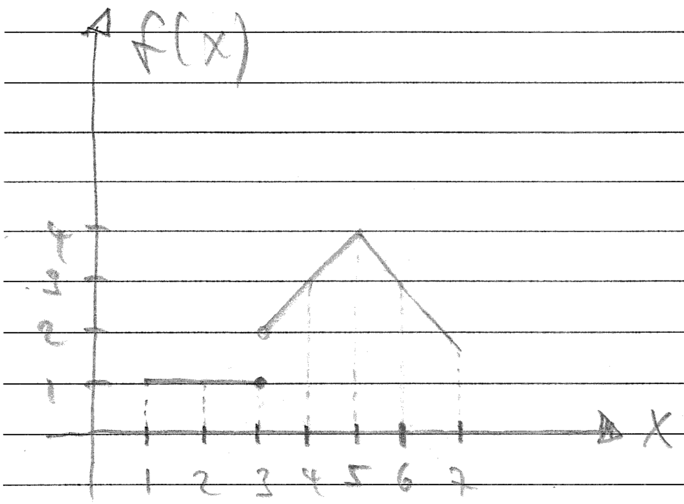
criterio del confronto asintotico

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [1,7] \to \mathbb{R}$ con $f'(2) = 0$, non continua in $x = 3$, con $f'(4) = 1$, con un punto angoloso in $x = 5$ e con $f'(6) = -1$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,1)$ alla funzione $f(x,y) = 5 + \arctan(x^4y^2)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$

- $f(1,1) = 5 + \arctan(1^4 \cdot 1^2) = 5 + \pi/4$

- $f_x(x,y) = \frac{1}{1+(x^4 \cdot y^2)^2} \cdot 4x^3 \cdot y^2 \Rightarrow f_x(1,1) = \frac{4 \cdot 1^3 \cdot 1^2}{1+(1^4 \cdot 1^2)^2} = \frac{4}{2} = 2$

- $f_y(x,y) = \frac{1}{1+(x^4 \cdot y^2)^2} \cdot x^4 2y \Rightarrow f_y(1,1) = \frac{2 \cdot 1^4 \cdot 1}{1+(1^4 \cdot 1^2)^2} = \frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow p(x,y) = 5 + \pi/4 + 2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x - 1)^3 \cdot y^3}{x^6 + y^6} \quad =: f(x,y)$$

Risoluzione

Poniamo $y = m \cdot x$, $m \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^3 \cdot m^3 \cdot x^3}{x^6 + m^6 \cdot x^6} = \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1 \text{ per } x \to 0} \right)^3 \cdot \frac{\cancel{x^3}^{\,1} \cdot m^3}{\cancel{x^3}^{\,3} \cdot (1+m^6)}$$

$$= \frac{m^3}{1+m^6}.$$

Quindi $\lim_{x \to 0} f(x, mx)$ dipende da $m \in \mathbb{R}$

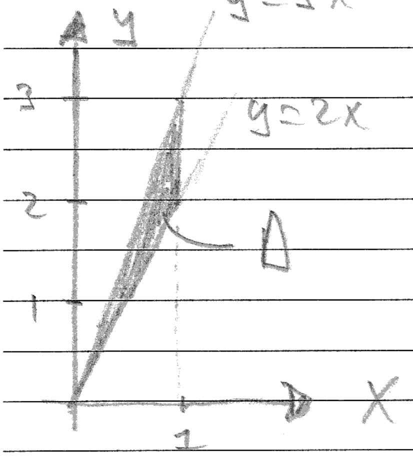
$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x-1)^3 \cdot y^3}{x^6+y^6}$ <u>non</u> esiste.

Esercizio 5 **[5 punti]**

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad 2x \le y \le 3x\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_D \underbrace{\frac{6}{5} e^{x^3} \cdot y}_{= f(x,y)} \, dx\, dy. =: I$$

Risoluzione



f è continua e D è y-semplice. Quindi per Fubini-Tonelli vale

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=2x}^{3x} \frac{6}{5} e^{x^3} \cdot y \, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{6}{5} e^{x^3} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=2x}^{3x} dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{3}{5} e^{x^3} \left((3x)^2 - (2x)^2 \right) dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{3}{\cancel{5}_{1}} \cdot e^{x^3} \cdot \overbrace{(9-4)}^{=\cancel{5}\ 1} x^2 \, dx$$

$$= \int_{0}^{1} 3 \cdot e^{x^3} \cdot x^2 \, dx$$

$$= \left[e^{x^3} \right]_0^1 = e^{1^3} - e^0 = \underline{\underline{e - 1}}$$