Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore **13.6.11**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di funzione crescente.

(ii) Verificare se $f(x) = 1 + \ln(2 + e^{3x})$, $x \in \mathbb{R}$, è crescente.

Risposta

(i) $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è crescente se per $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ segue $f(x_1) \le f(x_2)$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile con $f'(x) = \frac{3 \cdot e^{3x}}{2+e^{3x}} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (con il test di monotonia) f è (strettamente) crescente.

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare la formula di Taylor con resto di Peano.

(ii) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine $n = 3$ di $f(x) = x^5 - 7x^3 + 2x - 1$.

Risposta

(i) Sia $f \in C^n(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$. Allora

$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$ con

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \left\{ \begin{array}{l} \text{Polinomio di Taylor di} \\ \text{ordine } n \text{ e centro } x_0 \end{array} \right.$$

(ii)

Visto che $x^5 = o(x^3)$ per $x \to 0$ segue

$f(x) = -7x^3 + 2x - 1 + o(x^3)$ e quindi

$T_3(x) = -7x^3 + 2x - 1$.

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{n} a_n$ una serie convergente. Allora la serie $\sum_{n=0}^{n} \overset{=:b_n}{(-1)^n \cdot a_n^2}$

$\boxed{a}$ è oscillante

$\boxed{b}$ converge semplicemente ma non assolutamente

$\boxed{c}$ converge assolutamente

$\cancel{\boxed{d}}$ non si può stabilire il carattere di $\sum_{n=0}^{n} (-1)^n \cdot a_n^2$

Risoluzione

Sia $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Allora per il criterio di Leibniz $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Inoltre segue $(-1)^n \cdot a_n^2 = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge semplicemente ma non assolutamente $\Rightarrow$ non a) e non c).

Sia $a_n = (\frac{1}{2})^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge e $|(-1)^n \cdot a_n^2| = |(-1)^n (\frac{1}{4})^n| = (\frac{1}{4})^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge assolutamente $\Rightarrow$ non b). Quindi segue d)

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C(\mathbb{R})$ tale che $(x-1) \cdot f(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$\boxed{a}$ f è derivabile in $x_0 = 1$ $\boxed{b}$ f è decrescente $\boxed{c}$ $f(x) = 1 - x$ $\cancel{\boxed{d}}$ $f(1) = 0$

Risoluzione

Dalla relazione $(x-1) \cdot f(x) \leq 0$ segue: $f(x) \leq 0 \ \forall x > 1$ e $f(x) \geq 0 \ \forall x < 1 \Rightarrow$ (teorema degli zeri) f ammette uno zero in ogni intervallo $[a, b]$ con $a < 1 < b \Rightarrow f(1) = 0$.

Esercizio 3

[3 punti]

La derivata direzionale di $f(x,y) = x^y$ nel punto $(x_0, y_0) = (e, 1)$ nella direzione $\overbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}^{=:v}$ è uguale a

$\boxed{a}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cancel{\boxed{b}}$ $\frac{e+1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{c}$ 0 $\boxed{d}$ non esiste

Risoluzione

$f_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$, $f_y(x,y) = \ln(x) \cdot x^y \Rightarrow$

$f_x(e,1) = 1 \cdot e^{1-1} = 1$, $f_y(e,1) = \ln(e) \cdot e^1 = e \Rightarrow$

$D_v f(e,1) = v \cdot \operatorname{grad} f(e,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (1, e)$

$= \frac{1+e}{\sqrt{2}}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} x \cdot e^{-2x}\, dx =: I$$

Risoluzione

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{g'}\, dx \overset{\text{i.P.P.}}{=} \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{-1}{2} e^{-2x}}_{g} + \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{-2x}\, dx$$

$$= -\frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow I = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x \cdot e^{-2x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \Big[\underbrace{-\frac{b}{2} e^{-2b} - \frac{1}{4} e^{-2b}}_{\to 0 \text{ per } b \to +\infty} + \frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^{-2}}{4} \Big]$$

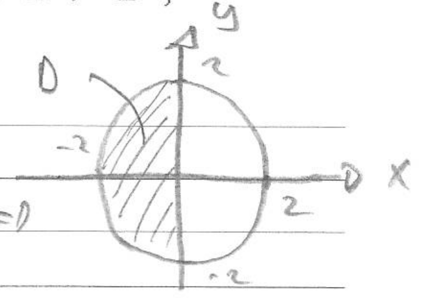
$$= \frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^{-2}}{4} = \frac{3}{4} e^{-2}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare l'integrale doppio $\iint_D x \cdot e^y \, dx\, dy =: I$ per $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0\}$.

Risoluzione



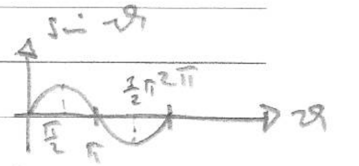
Conviene usare coordinate polari:

$x = \varrho \cdot \cos(\vartheta)$, $y = \varrho \cdot \sin(\vartheta)$ $\Rightarrow$

$D = D' = \underbrace{[0, 2]}_{\varrho} \times \underbrace{[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3}{2}\pi]}_{\vartheta}$ in coord. pol. $\Rightarrow$

$$I = \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \varrho \cdot \cos(\vartheta) \cdot e^{\varrho \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \varrho \; d\vartheta\, d\varrho$$

$$= \int_0^2 \varrho \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d}{d\vartheta}\left(e^{\varrho \cdot \sin(\vartheta)} \right) d\vartheta\, d\varrho$$



$$= \int_0^2 \varrho \cdot \left[e^{\varrho \cdot \sin \vartheta} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\varrho = \int_0^2 \underbrace{\varrho}_{f} \cdot \underbrace{(e^{-\varrho} - e^{\varrho})}_{g'}\, d\varrho$$

$$= \underbrace{\varrho}_{f} \cdot \underbrace{(-e^{-\varrho} - e^{\varrho})}_{g} \Big|_0^2 - \int_0^2 (-e^{-\varrho} - e^{\varrho})\, d\varrho =$$

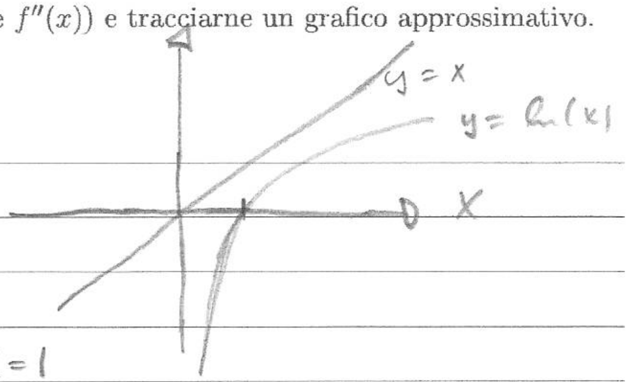
$$= -2 \cdot (e^{-2} + e^{2}) + (-e^{-\varrho} + e^{\varrho}) \Big|_0^2 = -2(e^{-2} + e^{2}) - e^{-2} + e^{2}$$

$$= -3 e^{-2} - e^{2}$$

Esercizio 6 [5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)}$ (senza calcolare $f''(x)$) e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione



$x - \ln(x) > 0 \;\forall x > 0. \Rightarrow$

- dominio di $f = (0, +\infty)$
- f non ha simmetrie
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$,
  $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\to 0}}{1 - \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}} = \frac{0}{1-0} = 0$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\underbrace{\frac{x}{\ln(x)}}_{\to \frac{0}{-\infty} = 0} - 1} = \frac{1}{0-1} = -1$
- f ammette un asintoto orizzontale $y = 0$.
- $f'(x) = \frac{(x-\ln(x))\cdot\frac{1}{x} - (1-\frac{1}{x})\cdot\ln(x)}{(x-\ln(x))^2} = \frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$. Inoltre f' cambia in $x_0 = e$ segno da "+" a "−" $\Rightarrow x_0 = e$ è un pto. di massimo locale

Grafico: