Analisi Matematica 1, Scritto 2-B. Durata della prova: 2 ore 13.6.11

**Cognome:** ................................**Nome:** ..........................................

**Matricola:** ....................**Corso di Laurea:** ................**Canale:** [A] [B] [C] [D]

## Domanda 1

**[2+3 punti]**

(i) Dare la definizione di funzione decrescente.

(ii) Verificare se $f(x) = 3 + \ln(2 + e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$, è decrescente.

**Risposta**

(i) $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è decrescente se per $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ segue $f(x_1) > f(x_2)$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile con $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{2+e^{-x}} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (per il test di monotonia) $f$ è (strettamente) decrescente.

## Domanda 2

**[2+3 punti]**

(i) Enunciare la formula di Taylor con resto di Lagrange.

(ii) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine $n = 3$ di $f(x) = -x^5 + 2x^3 - 5x + 1$.

**Risposta**

(i) Sia $f \in C^{n+1}(a,b)$ e $x_0, x \in (a,b)$. Allora $\exists\, c$ fra $x$ e $x_0$ t.c.

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ con

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \begin{cases} \text{Polinomio di Taylor} \\ \text{di ordine } n \text{ e centro } x_0 \end{cases}$$

(ii)

Visto che $-x^5 = o(x^3)$ per $x \to 0$ segue

$f(x) = 2x^3 - 5x + 1 + o(x^3)$ e quindi

$T_3(x) = 2x^3 - 5x + 1$

## Esercizio 1

**[3 punti]**

Sia $\sum_{n=0}^{n} a_n$ una serie assolutamente convergente. Allora la serie $\sum_{n=0}^{n} (-1)^n \cdot a_n^2$

- [x] a converge assolutamente
- b converge semplicemente ma non assolutamente
- c non converge
- d non si può stabilire il carattere di $\sum_{n=0}^{n} (-1)^n \cdot a_n^2$

**Risoluzione**

Per il criterio necessario per la convergenza di una serie segue $|a_n| \to 0$ per $n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $|a_n| \leq 1$ definitivamente $\Rightarrow$ $a_n^2 \leq |a_n|$ definitivamente $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è un maggiorante convergente per $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ $\Rightarrow$ a)

## Esercizio 2

**[3 punti]**

Sia $f \in C(\mathbb{R})$ tale che $(x+1) \cdot f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

a $f(x) = x+1$ b $f(-1) = 0$ c $f$ è crescente d $f$ è derivabile in $x_0 = -1$

**Risoluzione**

Dalla relazione $(x+1) \cdot f(x) \geq 0$ segue: $f(x) \geq 0$ $\forall x > -1$ e $f(x) \leq 0$ $\forall x < -1$ $\Rightarrow$ (per il teor. degli zeri) $f$ ammette uno zero in ogni intervallo $[a, b]$ con $a < -1 < b$ $\Rightarrow$ $f(-1) = 0$

## Esercizio 3

**[3 punti]**

La derivata direzionale di $f(x, y) = y^x$ nel punto $(x_0, y_0) = (e, 1)$ nella direzione $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è uguale a

- [x] a $\frac{e}{\sqrt{2}}$
- b $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- c 0
- d non esiste

**Risoluzione**

$f_x(x, y) = \ln(y) \cdot y^x$, $f_y(x, y) = x \cdot y^{x-1}$ $\Rightarrow$

$f_x(e, 1) = \ln(1) \cdot 1^e = 0$, $f_y(e, 1) = e \cdot 1^{e-1} = e$ $\Rightarrow$

$D_v f(e, 1) = v \cdot \operatorname{grad} f(e, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (0, e) = \frac{e}{\sqrt{2}}$

## Esercizio 4

**[4 punti]**

Calcolare, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} 2x \cdot e^{-x}\, dx = I$$

**Risoluzione**

$$\int \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{g'} dx \overset{\text{i.P.P.}}{=} \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{g} + \int \underbrace{2}_{f'} \cdot e^{-x}\, dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow I = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b 2x \cdot e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-2(xe^{-x} - e^{-x})\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \Big[\underbrace{-2be^{-b} - e^{-b}}_{\to 0 \text{ per } b \to +\infty} + 2 \cdot e^{-1} + 2e^{-1}\Big] = 4 \cdot e^{-1}$$

## Esercizio 5

**[4 punti]**

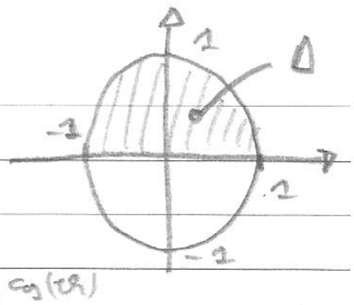
Calcolare l'integrale doppio $\iint_D y \cdot e^x\, dx\, dy =: I$ per $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.

**Risoluzione**

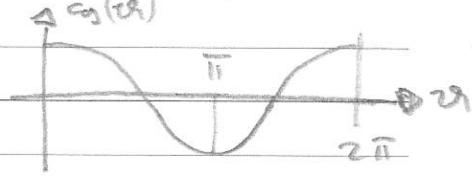
Conviene passare alle coordinate polari:

$D = D' = [0, 1] \times [0, \pi]$ in coord. polari

$\quad\ \ \rho \qquad\quad \vartheta$




$x = \rho \cdot \cos(\vartheta)$, $y = \rho \cdot \sin(\vartheta)$ $\Rightarrow$




$$I = \int_0^1 \int_0^\pi \rho \cdot \sin(\vartheta) \cdot e^{\rho \cdot \cos(\vartheta)} \cdot \rho \cdot d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho \int_0^\pi -\frac{d}{d\vartheta}\left(e^{\rho \cdot \cos(\vartheta)}\right) \cdot d\vartheta\, d\rho$$

$$= -\int_0^1 \rho \cdot \left[e^{\rho \cdot \cos(\vartheta)}\right]_0^\pi d\rho = -\int_0^1 \underbrace{\rho}_{f} \cdot \underbrace{(e^{-\rho} - e^{\rho})}_{g'} d\rho$$

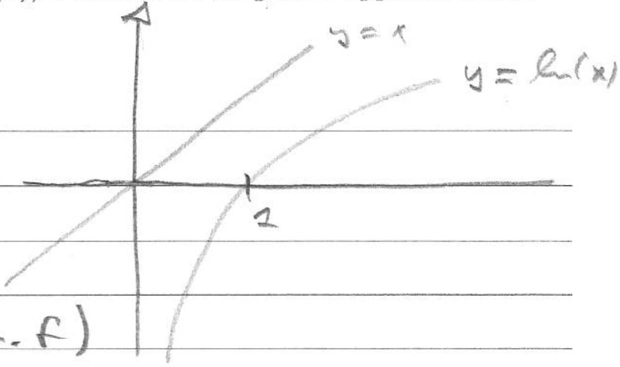
$$= -\left(\left[\underbrace{\rho}_{f} \cdot \underbrace{(-e^{-\rho} - e^{\rho})}_{g}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{(-e^{-\rho} - e^{\rho})}_{g} d\rho\right)$$

$$= -\left(-e^{-1} - e - (+e^{-\rho} - e^{\rho})\Big|_0^1\right) = e^{-1} \cancel{+e} + e^{-1} \cancel{-e} \cancel{-1} \cancel{+1}$$

$$= 2 \cdot e^{-1}$$

## Esercizio 6 [5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x}{x-\ln(x)}$ (senza calcolare $f''(x)$) e tracciarne un grafico approssimativo.




**Risoluzione**

$x - \ln(x) > 0 \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow$

- dominio di $f = (0, +\infty)$
- $f$ non ha simmetrie
- $f(x) = 0$ mai ($x = 0 \notin \text{dom.} f$)
- $f(x) > 0$ sempre
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 - \frac{\ln(x) \to -\infty}{x \to 0^+}} = \frac{1}{1-(-\infty)} = 0$ $\quad \to \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{\ln(x)}{x} \to 0} = \frac{1}{1-0} = 1$
- $f$ ammette un asintoto orizzontale $y = 1$
- $f'(x) = \frac{(x-\ln(x)) \cdot 1 - x \cdot (1 - \frac{1}{x})}{(x-\ln(x))^2} = \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$. Inoltre $f'(x)$ cambia segno in $x_0 = e$ da "+" a "−" $\Rightarrow$ $x_0 = e$ è un pto. di max. locale

Grafico