Istituzioni di Matematiche 1° Modulo $\boxed{6\,\text{CFU}}$ **Durata: 90 min.** **25.7.16**

Firma:

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
Σ	

Domanda 1

[5 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x_0)$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare l'equazione della retta tangente t di $f(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ nel punto $x_0 = 1$.

Risposta

(i)

cfr. appunti

(ii)
- $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
- $f(x_0) = f(1) = \frac{1^2+2}{2\cdot 1-1} = 3$
- $f'(x) = \frac{(2x-1)\cdot 2x - 2\cdot(x^2+2)}{(2x-1)^2}$

$\Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{\underbrace{(2\cdot 1-1)\cdot 2\cdot 1}_{=2} - 2\overbrace{(1^2+2)}^{6}}{\underbrace{(2\cdot 1-1)^2}_{=1}} = -4$

$\Rightarrow f(x) = 3-4(x-1)$
$= 7-4x$

Domanda 2

[5 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = x^5 - 5x + 1$ ammette uno zero nel intervallo $[0, 1]$.

Risposta

(i)

cfr. appunti

(ii)
- f è continua
- $f(0) = 1 > 0$
- $f(1) = 1-5+1 = -3 < 0$

$\xRightarrow{\text{teorema degli zeri}}$ f ammette uno zero in $[0,1]$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2-3n}-2n\right) = a_n$$

Risoluzione

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{4n^2-3n}-2n\right)\cdot\left(\sqrt{4n^2-3n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2-3n}+2n}$$

$$= \frac{\cancel{4n^2}-3n-\cancel{4n^2}}{\sqrt{4n^2-3n}+2n} = \frac{-3\cancel{n}}{2\cancel{n}\left(\underbrace{\sqrt{1-\frac{3}{4n}}}_{\to 1}+2\right)} \to \underline{\underline{-3/4}}$$

$\to 1$ per $n \to +\infty$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = \ln(1+x)\cdot\big(1-\cos(x)\big)$.

Risoluzione

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \Rightarrow 1-\cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow \ln(1+x)\cdot(1-\cos(x)) = \left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\cdot\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$$

$$= \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow T_4(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare l'integrale

$$I := \int_0^1 x \cdot e^{(x^2)}\, dx$$

Risoluzione

Sost. $t = x^2 \Rightarrow$ • $\frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow x \cdot dx = \frac{dt}{2}$

• $x = 0 \Rightarrow t = 0^2 = 0$

• $x = 1 \Rightarrow t = 1^2 = 1$

Quindi $I = \int_0^1 e^{x^2} \cdot \underbrace{x\,dx}_{= dt/2} = \int_0^1 e^t \cdot \frac{dt}{2}$

$= \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

Esercizio 4

[7 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

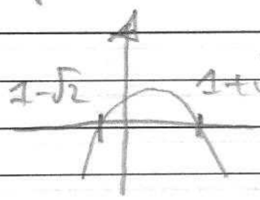
Risoluzione

- dominio: tutto $\mathbb{R}$
- simmetrie: no
- zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ | $f(0) = -1$
- segno: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
- derivata: $f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 1 - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x+1=0$

$\Leftrightarrow x = x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2+4\cdot 1}}{-2\cdot 1} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1-\sqrt{2} \approx -0{,}4\ldots$; $\frac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2} \approx 2.4\ldots$

Segno di $f'(x)$ = segno di $-x^2+2x+1$



$\Rightarrow f'(x)$ cambia segno in

- $x_1 = 1-\sqrt{2}$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ pto. di min. locale
- $x_2 = 1+\sqrt{2}$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow$ — " — max. locale

limiti al bordo del dominio:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ asintoto orizzontale $y=0$ per $x\to\pm\infty$

Grafico: