Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **8.1.18**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al limite $l \in \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pi$.

Risposta

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$|l - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$

(ii) p.e. $a_n = \pi + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $\ln(x) = \cos(x)$ ammette una soluzione x_0 nell'intervallo $[1, \frac{\pi}{2}]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ t.c. $f(a)\cdot f(b) < 0$, allora

$\exists c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii) Sia $f: [1, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(x) - \cos(x)$.

Allora:
- $\ln(x) = \cos(x) \iff f(x) = 0$
- f è continua
- $f(1) = \ln(1) - \cos(1) = -\cos(1) < 0$
- $f(\pi/2) = \ln(\pi/2) - \cos(\pi/2) = \ln(\pi/2) > 0$

T.d.z.

$\Downarrow$

$\Rightarrow \exists c \in (1, \pi/2)$ t.c. $f(c) = 0$ cioè $\ln(c) = \cos(c)$.

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1+(n+2)!}{(n+3)!+4}}_{=:\, a_n > 0}$$

Risoluzione

- $a_n \sim \dfrac{(n+2)!}{(n+3)!} = \dfrac{\cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+2)!}\cdot(n+3)} \sim \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{=:\, b_n}$ per $n \to +\infty$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ diverge

$\Rightarrow$ (per il criterio del confronto asintotico) anche la serie S diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \ln(1+x) - e^x + 1}{x^3} =: \ell$$

Risoluzione

Con Taylor: numeratore da sviluppare fino al 3° ordine

$$2\sin(x) - \ln(1+x) - e^x + 1 = 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + 1$$

$$= \cancel{2x} - \frac{x^3}{3} \cancel{-x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} \cancel{-1} \cancel{-x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} \cancel{+1} + o(x^3)$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{5}{6}\cdot x^3 \text{ per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{6}\cdot x^3}{x^3} = -\frac{5}{6}$$

(N.b.: Il limite si può calcolare anche con de l'Hospital, cfr. Compito B)

Esercizio 3 **[5 punti]**

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(\frac{\pi}{2}, 2)$ per $f(x,y) = y \cdot e^{\cos(x)}$ e il versore $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Risoluzione

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_x(x,y) = y \cdot e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) \\ \bullet\ f_y(x,y) = e^{\cos(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è } C^1 \Rightarrow$ f è differenziabile

Quindi per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(\pi/2, 2) = \nabla f(\pi/2, 2) \cdot v$$

$$= 2 \cdot e^{\overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0}} \cdot (-\overbrace{\sin(\pi/2)}^{=1}) \cdot \frac{1}{2} + e^{\cos(\pi/2)} \cdot \sqrt{3}/2$$

$$= 2 \cdot e^0 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} + e^0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}/2$$

Esercizio 4 **[4 punti]**

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - (x^2+y)\cdot(x^2-y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{x^4 - (x^4 - y^2)}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

Risoluzione

• Continuità: Poniamo $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m^2}{1+m^2}$$ dipende da m

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ non $\exists$ $\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ • f non è differenziabile in $(0,0)$.

• Derivabilità: $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{0-0}{h}}_{=0} = 0$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2}{0^2+h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \text{ non } \exists.$$

Quindi f non è derivabile in $(0,0)$

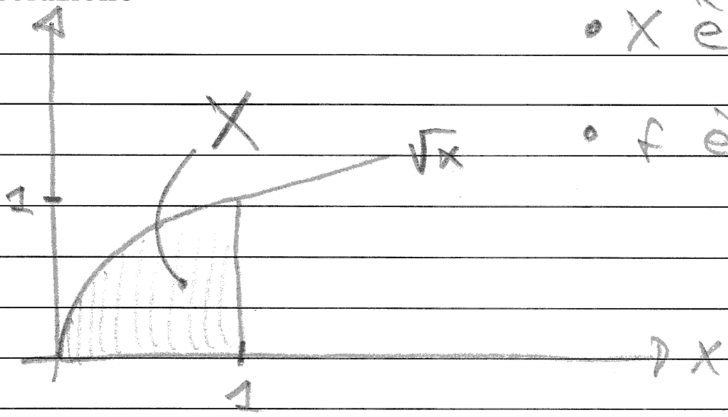
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X \underbrace{\sin(x^2) \cdot y}_{=: f(x,y)} \, dx\, dy.$$

Risoluzione



- X è y-semplice
- f è continua

Quindi per Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} \sin(x^2) \cdot y \, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \sin(x^2) \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \sin(x^2) \cdot \left(\frac{x}{2} - 0 \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 \underbrace{\sin(x^2) \cdot 2x}_{= (-\cos(x^2))'} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\cos(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{4} \left(-\cos(1) + \overset{1}{\overset{\parallel}{\cos(0)}} \right)$$

$$= \underline{\frac{1}{4} \left(1 - \cos(1) \right)}$$