Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **8.1.18**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente al limite $+\infty$.

(ii) Dare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = e$.

Risposta

(i) $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M\ \forall n \geq n_0$.

(ii) p.e. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \geq 1$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $\sin(x) = \ln(x)$ ammette una soluzione x_0 nell'intervallo $[1, \pi]$.

Risposta

(i) Cfr. compito A oppure appunti

(ii) Sia $f: [1,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x) - \ln(x)$.

Allora:
- $\sin(x) = \ln(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$
- f è continua
- $f(1) = \sin(1) - \ln(1) = \sin(1) > 0$
- $f(\pi) = \sin(\pi) - \ln(\pi) = -\ln(\pi) < 0$

T.d.Z.

$\Rightarrow \exists\, c \in (1,\pi)$ t.c. $f(c) = 0$ cioè $\sin(c) = \ln(c)$.

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!+2}{(n+3)!+4} =: a_n > 0$$

Risoluzione

- $a_n \sim \frac{(n+1)!}{(n+3)!} = \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}\,(n+2)\cdot(n+3)} \sim \frac{1}{n^2} =: b_n$ per $n \to +\infty$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$\Rightarrow$ (per il criterio del confronto asintotico) anche

la serie S converge

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\ell := \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) + 2\ln(1+x) - 2e^x + 3x^2}{x^3} \quad \left(= \frac{2+0-2+0}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

Risoluzione

Con de l'Hospital:

$$\ell \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x) + 2(1+x)^{-1} - 2e^x + 6x}{3x^2} \quad \left(= \frac{0+2-2+0}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x) - 2(1+x)^{-2} - 2e^x + 6}{6x} \quad \left(= \frac{-2-2-2+6}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) + 4(1+x)^{-3} - 2e^x}{6} = \frac{0+4-2}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 3 **[5 punti]**

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(3, 2\pi)$ per $f(x, y) = x \cdot e^{\sin(y)}$ e il versore $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Risoluzione

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_x(x,y) = e^{\sin(y)} \\ \bullet\ f_y(x,y) = x \cdot e^{\sin(y)} \cdot \cos(y) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è } C^1 \Rightarrow f \text{ è differenziabile}$$

Quindi per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(3, 2\pi) = \nabla f(3, 2\pi) \cdot v$$

$$= e^{\sin(2\pi)} \cdot \sqrt{3}/2 + 3 \cdot e^{\overset{\neq 0}{\sin(2\pi)}} \cdot \overset{\neq 1}{\cos(2\pi)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= e^0 \cdot \sqrt{3}/2 + 3 \cdot e^0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

Esercizio 4 **[4 punti]**

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y^2)\cdot(x-y^2)+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x, y) = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{(x^2 - y^4) + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Risoluzione

Continuità: Poniamo $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{x \to 0} f(x, m \cdot x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1}{1+m^2} \text{ dipende da } m$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) \text{ non } \exists \Rightarrow f \text{ non è continua in } (0,0)$$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

• Derivabilità: $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{=1}{\frac{h^2}{h^2+0^2}} - 0}{h}$ non esiste

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \underset{=0}{\frac{0-0}{h}} = 0$$

Quindi f non è derivabile in $(0,0)$

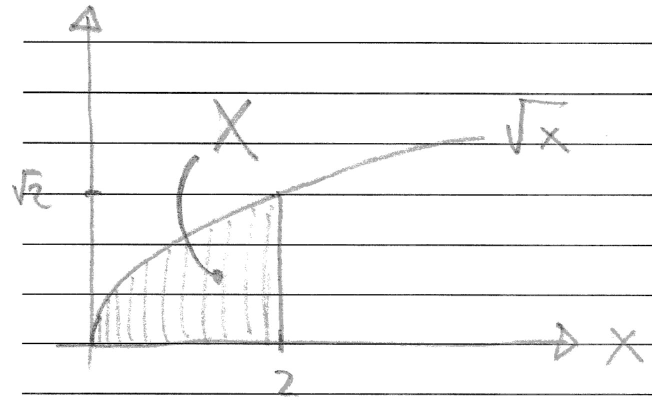
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X \underbrace{\cos(x^2)\cdot y}_{=:\, f(x,y)}\, dx\, dy.$$

Risoluzione



- X è y-semplice
- f è continua

Quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} \cos(x^2)\cdot y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \cos(x^2)\cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^2 \cos(x^2)\cdot\left(\frac{x}{2} - 0\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot \int_0^2 \underbrace{\cos(x^2)\cdot 2x}_{= (\sin(x^2))'}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin(x^2)\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(\sin(4) - \overbrace{\sin(0)}^{=0}\right)$$

$$= \frac{\sin(4)}{4}$$