Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 11.6.13

Firma:...............................

Cognome.............................Nome...................................A.A..........

Matricola.............................Corso di Laurea.......................

Canale $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Se $A \subset \mathbb{R}$, dare la definizione di $\sup A$ e $\max A$.

(ii) Se $A = \{\frac{-4}{n+9} : n \in \mathbb{N}\}$, calcolare $\sup A$ e $\max A$.

Risposta

(i) sup A = maggiorante più piccolo di A

max A = elemento più grande di A

(ii) $\frac{-4}{n+9} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-4}{n+9} = 0$

$\Rightarrow 0 = \sup A$

$0 \notin A \Rightarrow \max A$ non esiste

Domanda 2

[4 punti]

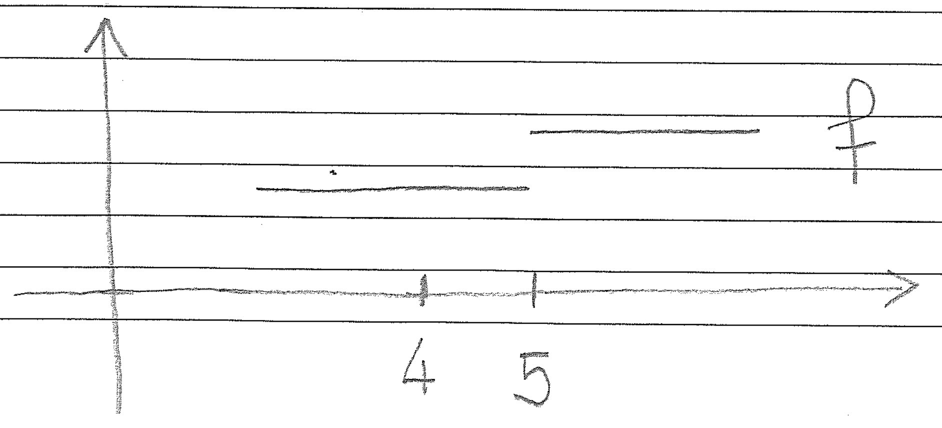
(i) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, dare la definizione di funzione f continua in x_0.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione continua in 4 e discontinua in 5.

Risposta

(i) f è continua in x_0 se per ogni successione x_n con $x_n \to x_0$ risulta $f(x_n) \to f(x_0)$

(ii)



Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)^4\ln[(x-6)^9]}{\sin[(x-7)^5]} = *$$

Risoluzione

$$* = \lim_{t\to 0}\frac{t^4\ln[(1+t)^9]}{\sin[t^5]} = \lim_{t\to 0}\frac{t^4\, 9\ln(1+t)}{\sin(t^5)} =$$

$t = x-7 \to 0$

$$= \lim_{t\to 0} 9\,\frac{t^5}{\sin(t^5)}\,\frac{\ln(1+t)}{t} = 9$$

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{17n}$$

Risoluzione

Uso il criterio del confronto asintotico

$$\frac{\dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{17n}}{\dfrac{1}{17n\sqrt{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{17n}\,17n\sqrt{n} = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{e^t-1}{t}\to 1$$

$\boxed{t = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{17n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{17n\sqrt{n}}$ hanno lo stesso comportamento

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{17n\sqrt{n}} = \frac{1}{17}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$ converge perché $\frac{3}{2}>1$

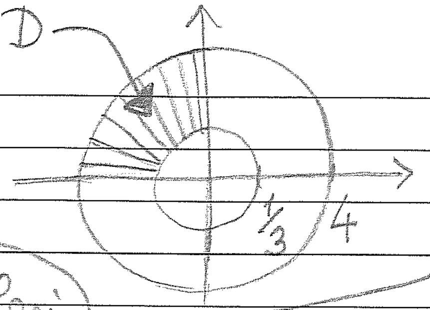
quindi la serie data converge

Esercizio 3

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{9} \leq x^2 + y^2 \leq 16, x \leq 0, y \geq 0\right\}$. Calcolare l'integrale $\boxed{\iint\limits_D \frac{5xy}{x^2+y^2}\,dxdy} = ⊙$.

Risoluzione



coordinate polari $\to E = \left\{(\rho,\theta) : \frac{1}{3} \leq \rho \leq 4,\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right\}$

$$⊙ = \iint\limits_E \frac{5\rho\cos\theta\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2}\,\rho\,d\rho d\theta = \iint\limits_E 5\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho d\theta =$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{4} \underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 5\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta\right)}_{5\rho\left[\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2}\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} = \frac{5\rho}{2}\left[\mathrm{sen}^2(\pi) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{5}{2}\rho\left[0-1\right] = -\frac{5}{2}\rho} d\rho = \int_{\frac{1}{3}}^{4} -\frac{5}{2}\rho\,d\rho = -\frac{5}{4}\left[\rho^2\right]_{\rho=\frac{1}{3}}^{\rho=4} = -\frac{5}{4}\left[16 - \frac{1}{9}\right] =$$

$$= -\frac{715}{36}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ dove $f(x,y) = \sin(x^2 y - 1)$, $(x_0, y_0) = (3, \frac{1}{9})$ e $v = \frac{1}{5}(3,4)$.

Risoluzione

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = Df(x_0,y_0) \cdot v$$

$$f_x(x,y) = \left[\cos(x^2y-1)\right] 2xy \ ; \quad f_x(x_0,y_0) = \left[\cos\left(3^2\tfrac{1}{9} - 1\right)\right] \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

$$f_y(x,y) = \left[\cos(x^2y-1)\right] x^2 \ ; \quad f_y(x_0,y_0) = \left[\cos\left(3^2\tfrac{1}{9} - 1\right)\right] 3^2 = 9$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \left(\frac{2}{3}, 9\right) \cdot \frac{1}{5}(3,4) = \frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}3 + 9 \cdot 4\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2 + 36\right] = \frac{38}{5}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{9-x^2}}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio $= (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-1}$; $y = e^{-1}$ asintoto orizzontale a $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-1}$; $y = e^{-1}$ asintoto orizzontale a $+\infty$

$\lim_{x \to (-3)^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to (-3)^+} f(x) = +\infty$; $x = -3$ asintoto verticale

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$; $x = 3$ asintoto verticale

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 0$

$$f'(x) = 18x \, \frac{e^{\frac{x^2}{9-x^2}}}{(9-x^2)^2}$$

f decresce su $(-\infty, -3)$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ decresce su } (-3, 0] \\ f \text{ cresce su } [0, 3) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(0) = e^0 = 1$ minimo relativo

f cresce su $(3, +\infty)$