Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 11.6.13

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea .... Canale A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Se $A \subset \mathbb{R}$, dare la definizione di $\inf A$ e $\min A$.

(ii) Se $A = \{\frac{5}{n+7} : n \in \mathbb{N}\}$, calcolare $\inf A$ e $\min A$.

Risposta

(i) inf A = minorante più grande di A

min A = elemento più piccolo di A

(ii) $\frac{5}{n+7} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{5}{n+7} = 0$

$\Rightarrow 0 = \inf A$

$0 \notin A \Rightarrow \min A$ non esiste

Domanda 2

[4 punti]

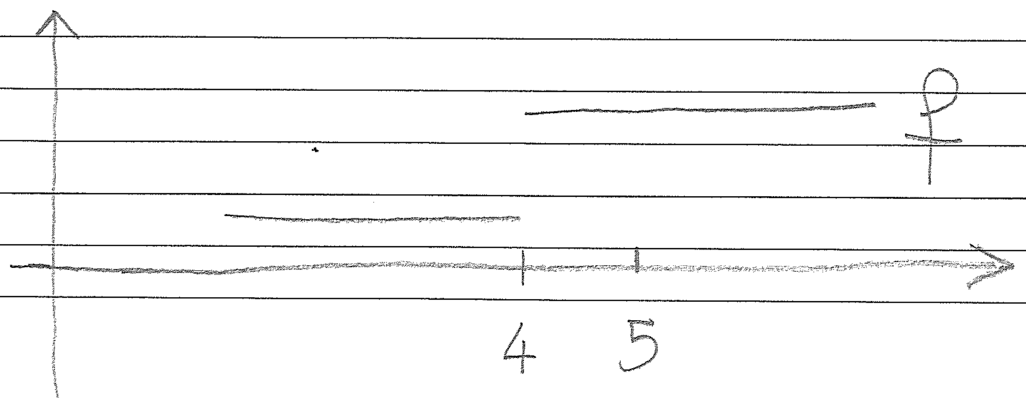
(i) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, dare la definizione di funzione f continua in x_0.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione discontinua in 4 e continua in 5.

Risposta

(i) f è continua in x_0 se per ogni successione con $x_n \to x_0$ risulta $f(x_n) \to f(x_0)$

(ii)



Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 8} \frac{(x-8)^3 \ln[(x-7)^6]}{\sin[(x-8)^4]} = *$$

Risoluzione

$$* \underset{\uparrow}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t^3 \ln[(1+t)^6]}{\sin[t^4]} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\, 6 \ln(1+t)}{\sin(t^4)} =$$

$t = x-8 \to 0$

$$= \lim_{t\to 0} 6 \frac{t^4}{\sin(t^4)} \frac{\ln(1+t)}{t} = 6$$

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{15\sqrt{n}}$$

Risoluzione

Uso il Criterio del confronto asintotico

$$\frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{15\sqrt{n}}}{\frac{1}{15 n\sqrt{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{15\sqrt{n}} 15 n\sqrt{n} = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \underset{\uparrow}{=} \frac{e^{t}-1}{t} \longrightarrow 1$$

$t = \frac{1}{n} \to 0$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{15\sqrt{n}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{15n\sqrt{n}}$ hanno lo stesso comportamento

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{15n\sqrt{n}} = \frac{1}{15}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$ converge perché $\frac{3}{2} > 1$

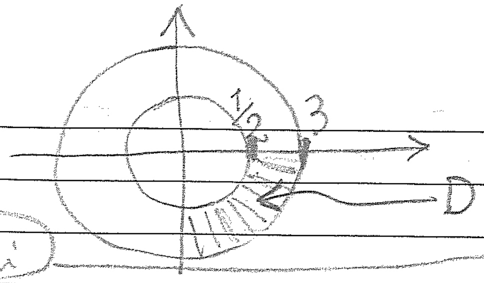
quindi la serie data converge

Esercizio 3

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\}$. Calcolare l'integrale $\underbrace{\iint_D \frac{7xy}{x^2+y^2}\,dxdy}_{= \odot}$.

Risoluzione



coordinate polari $\Rightarrow E = \{(\rho,\vartheta) : \frac{1}{2} \leq \rho \leq 3, \frac{3}{2}\pi \leq \vartheta \leq 2\pi\}$

$$\odot \stackrel{\downarrow}{=} \iint_E \frac{7\rho\cos\vartheta\,\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta = \iint_E 7\rho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{3} \underbrace{\left(\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} 7\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta \right)}_{} d\rho = \int_{\frac{1}{2}}^{3} -\frac{7}{2}\rho\,d\rho = -\frac{7}{4}\left[\rho^2\right]_{\rho=\frac{1}{2}}^{\rho=3} = -\frac{7}{4}\left[3^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = -\frac{245}{16}$$

$$= \frac{7\rho}{2}\left[\mathrm{sen}^2\vartheta\right]_{\vartheta=\frac{3}{2}\pi}^{\vartheta=2\pi} = \frac{7}{2}\rho\left[\mathrm{sen}^2(2\pi) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right] = \frac{7}{2}\rho\left[0-1\right] = -\frac{7}{2}\rho$$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ dove $f(x,y) = \sin(xy^2 - 1)$, $(x_0, y_0) = (\frac{1}{9}, 3)$ e $v = \frac{1}{5}(4, 3)$.

Risoluzione

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = Df(x_0,y_0) \cdot v$$

$$f_x(x,y) = \left[\cos(xy^2-1)\right] y^2 \; ; \; f_x(x_0,y_0) = \left[\cos\left(\frac{1}{9}3^2-1\right)\right]3^2 = 9$$

$$f_y(x,y) = \left[\cos(xy^2-1)\right] x\,2y \; ; \; f_y(x_0,y_0) = \left[\cos\left(\frac{1}{9}3^2-1\right)\right]\frac{1}{9}2\cdot 3 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \left(9, \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{5}(4,3) = \frac{1}{5}\left[9\cdot 4 + \frac{2}{3}3\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[36 + 2\right] = \frac{38}{5}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{x^2-9}}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione $f(x) = e^{\frac{-x^2}{x^2-9}} = e^{\frac{x^2}{9-x^2}}$

vedere compito 1-A