Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 18.2.13

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea .... Canale A B C D

Firma: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Fare un esempio di serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Risposta

(i) Sia $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$

allora $\lim_{k \to +\infty} S_k$ esiste ed è un numero

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Domanda 2

[4 punti]

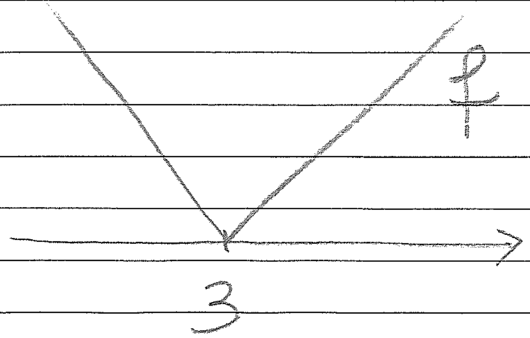
(i) Dare la definizione di derivata nel punto x_0 per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio (basta il grafico) di funzione f continua dappertutto, non derivabile in $x_0 = 3$ ma derivabile in ogni altro punto.

Risposta

(i) esiste $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ed è un numero

(ii)



Esercizio 1 [4 punti]

Calcolare le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ di $f(x,y) = \ln(x^4 + e^{5y} + 16)$ e scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $(1,0)$.

Risoluzione $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3}{x^4 + e^{5y} + 16}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{5e^{5y}}{x^4+e^{5y}+16}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{5}{18}$

$f(1,0) = \ln(18)$

$P(x,y) = \ln(18) + \frac{4}{18}(x-1) + \frac{5}{18}y$

Esercizio 2 [4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio; nel caso in cui sia convergente, calcolarne il valore.

$$\int_{-\infty}^{-41} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Risoluzione

$\int_{-\infty}^{-41} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-41} \frac{1}{x^2}\,dx =$

$= \lim_{a\to-\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=a}^{x=-41} = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{-41} + \frac{1}{a}\right] =$

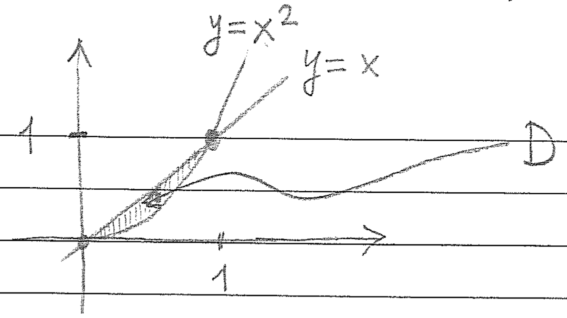
$= \frac{1}{41}$

Esercizio 3

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le x\}$. Calcolare l'integrale $\iint_D 3xy^2 dxdy$.

Risoluzione



$$\iint_D 3xy^2 dxdy = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{x^2}^{x} 3xy^2 dy \right)}_{=\left[x y^3 \right]_{y=x^2}^{y=x} = x(x)^3 - x(x^2)^3 = x^4 - x^7} dx = (*)$$

$$(*) = \int_0^1 (x^4 - x^7) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{8-5}{40} = \frac{3}{40}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{15xy+7x^2}{x^2+3y^2} + 2x & \text{se } (x,y) \ne (0,0), \\ 7 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

$$f(x,mx) = \frac{15x\,mx + 7x^2}{x^2 + 3m^2x^2} + 2x = \frac{15m+7}{1+3m^2} + 2x$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,mx) = \frac{15m+7}{1+3m^2}$$

per $m=1$ si ha $\frac{15+7}{1+3} = \frac{22}{4} \ne 7 = f(0,0)$

quindi f non è continua in $(0,0)$

dunque f non è differenziabile in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{15h0 + 7h^2}{h^2+0} + 2h - 7}{h} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0+0}{0+3h^2} + 0 - 7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-7}{h} \text{ non esiste}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \ln[\cos(1-t^4)]dt}{(x-1)^3}$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \ln[\cos(1-t^4)]\,dt}{(x-1)^3} \underset{\substack{\text{forma } \frac{0}{0} \\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln[\cos(1-x^4)]}{3(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\cos(1-x^4)}\left[-\sin(1-x^4)\right](-4x^3)}{6(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4x^3}{6\cos(1-x^4)} \cdot \frac{\sin(1-x^4)}{1-x^4} \cdot \frac{1-x^4}{x-1} = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{4x^3}{6\cos(1-x^4)} \to \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sin(1-x^4)}{1-x^4} \to 1$$

$$\frac{1-x^4}{x-1} = \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{x-1} = \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)}{x-1} = -(1+x)(1+x^2)$$

$$\to -2\cdot 2 = -4$$