Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 18.2.13

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** .... **Canale** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza per una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini positivi.

(ii) Fare un esempio di serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini positivi.

Risposta

(i) Se $a_n \geq 0$, $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$

allora $\lim_{k \to +\infty} S_k = +\infty$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Domanda 2

[4 punti]

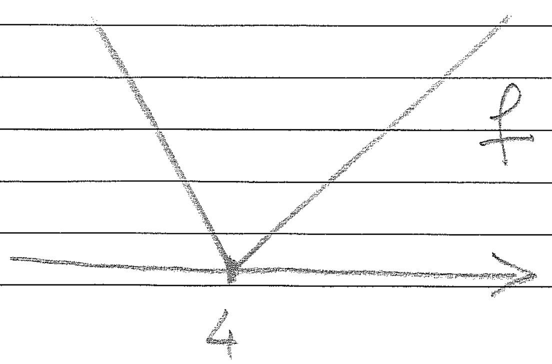
(i) Dare la definizione di derivata nel punto x_0 per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio (basta il grafico) di funzione f continua dappertutto, non derivabile in $x_0 = 4$ ma derivabile in ogni altro punto.

Risposta

(i) esiste $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ed è un numero

(ii)



Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ di $f(x,y) = \ln(e^{5x} + y^4 + 16)$ e scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $(0,2)$.

Risoluzione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{5e^{5x}}{e^{5x}+y^4+16}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3}{e^{5x}+y^4+16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = \frac{5}{33}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = \frac{32}{33}$$

$$f(0,2) = \ln(33)$$

$$P(x,y) = \ln(33) + \frac{5}{33}x + \frac{32}{33}(y-2)$$

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio; nel caso in cui sia convergente, calcolarne il valore.

$$\int_{-\infty}^{-37} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Risoluzione

$$\int_{-\infty}^{-37} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-37} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=a}^{x=-37} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{-37} + \frac{1}{a}\right] = \frac{1}{37}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le x\}$. Calcolare l'integrale $\iint_D 3xy^2 dxdy$.

Risoluzione

Vedere Compito 1-A

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{14xy+5y^2}{6x^2+y^2} + 3y & \text{se } (x,y) \ne (0,0), \\ 5 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

$$f(x, mx) = \frac{14xmx + 5m^2x^2}{6x^2 + m^2x^2} + 3mx = \frac{14m + 5m^2}{6+m^2} + 3mx$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \frac{14m + 5m^2}{6+m^2}$$

per $m = 0$ si ha $\frac{0+0}{6+0} = 0 \ne 5 = f(0,0)$

quindi f non è continua in $(0,0)$

dunque f non è differenziabile in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0+0}{6h^2+0} + 0 - 5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5}{h} \text{ non esiste}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0+5h^2}{0+h^2} + 3h - 5}{h} = 3$$

Esercizio 5

[6 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 5} \frac{\int_5^x \sin[\ln(t^2-24)]dt}{(x-5)^2}$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 5} \frac{\int_5^x \sin[\ln(t^2-24)]\,dt}{(x-5)^2} = \lim_{x\to 5} \frac{\sin[\ln(x^2-24)]}{2(x-5)} =$$

forma $\frac{0}{0}$

L'Hospital

$$= \lim_{x\to 5} \frac{\{\cos[\ln(x^2-24)]\}\frac{1}{x^2-24}\,2x}{2} =$$

$$= \frac{\{\cos[0]\}\frac{1}{25-24}\,10}{2} = \frac{10}{2} = 5$$