Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore 18.2.13

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

Canale	A	B	C	D
D1				
D2				
E1				
E2				
E3				
E4				
E5				
Σ				

Domanda 1

[3 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per le serie a termini positivi.

(ii) Fare un esempio di una serie convergente e tale che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

Risposta

(i) $a_n > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \begin{cases} <1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \\ >1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge ; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \Rightarrow 1$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di integrale improprio di una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su un intervallo illimitato $[a, +\infty)$.

(ii) Sia $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$. Allora ... (motivare la risposta)

[a] $I = 0$ [b] $I = -\ln(\ln 2)$ ~~[c]~~ I diverge [d] I non si può calcolare

Risposta

(i) $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii) $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln(\ln x)\Big]_{x=2}^{x=b} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\Big] = +\infty$$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 \ln\left(1+\frac{n^2}{n!}\right) = 0$$

Risoluzione

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n^2}{1\times 2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n} = \frac{1}{1\times2\times\cdots\times(n-2)}\,\frac{n}{n-1} \to 0$$

$$\frac{1}{1\times2\times\cdots\times(n-2)} \to 0, \qquad \frac{n}{n-1} \to 1$$

$$n^4 \ln\left(1+\frac{n^2}{n!}\right) = \boxed{n^4\,\frac{n^2}{n!}}\;\frac{\ln\left(1+\frac{n^2}{n!}\right)}{\frac{n^2}{n!}}, \qquad \frac{\ln\left(1+\frac{n^2}{n!}\right)}{\frac{n^2}{n!}} \to 1$$

$$n^4\,\frac{n^2}{n!} = \frac{n^6}{n!} = \frac{1}{1\times2\times\cdots\times(n-6)}\;\frac{n^5}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}$$

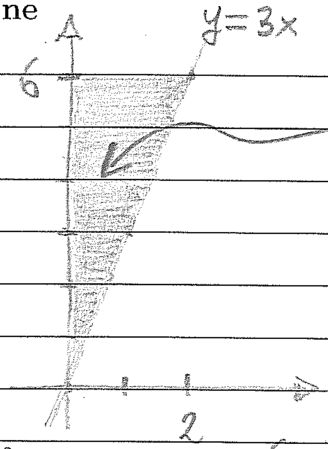
$$\frac{1}{1\times2\times\cdots\times(n-6)} \to 0, \qquad \frac{n^5}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \to 1$$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\quad 3x\le y\le 6\}$. Calcolare l'integrale $\iint_D e^{y^2}\,dxdy$.

Risoluzione



$$D = \{0\le x\le 2;\ 3x\le y\le 6\} = \underbrace{\left\{0\le y\le 6,\ 0\le x\le \frac{y}{3}\right\}}$$

Uso questa descrizione per D

$$\iint_D e^{y^2}\,dxdy = \int_0^6 \underbrace{\left(\int_0^{y/3} e^{y^2}\,dx\right)}_{=\left[e^{y^2}x\right]_{x=0}^{x=y/3} = e^{y^2}\frac{y}{3}} dy = *$$

$$* = \int_0^6 e^{y^2}\frac{y}{3}\,dy = \left[\frac{1}{6}e^{y^2}\right]_{y=0}^{y=6} = \frac{1}{6}e^{36} - \frac{1}{6}e^{0} = \frac{e^{36}-1}{6}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Trovare i punti (x,y) che annullano il gradiente della funzione $f(x,y) = xe^{x-y^2}$.

Risoluzione $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-y^2} + x e^{x-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{x-y^2}(-2y)$

$$\text{grad} f(x,y) = \left((1+x)e^{x-y^2}, -2xy\, e^{x-y^2} \right)$$

gradiente nullo $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} (1+x)e^{x-y^2} = 0 \\ -2xy\, e^{x-y^2} = 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$(-1, 0)$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1+x = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità e la derivabilità in $(0, +\infty)$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Risoluzione $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

quindi f è continua in $x=1$;
in $(0,1)$ $f(x)$ è continua perché coincide con $\frac{\ln x}{x-1}$ e $(0,1)$ è un intervallo aperto;
stesso discorso in $(1,+\infty)$.

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - (\ln x)1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$$

per $x \in (0,1)$ e per $x \in (1,+\infty)$.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$\underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{2x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2 c^{-\frac{1}{x}}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $x \neq 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^2 \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{e^0 = 1}} = +\infty$$ non ci sono asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 e^{-\frac{1}{x}}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}} = 0$$

non ci sono asintoti obliqui

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x^2 e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\left(-\frac{1}{x}\right)^2}} = \lim_{t \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{e^t}{t^2}} = +\infty$$

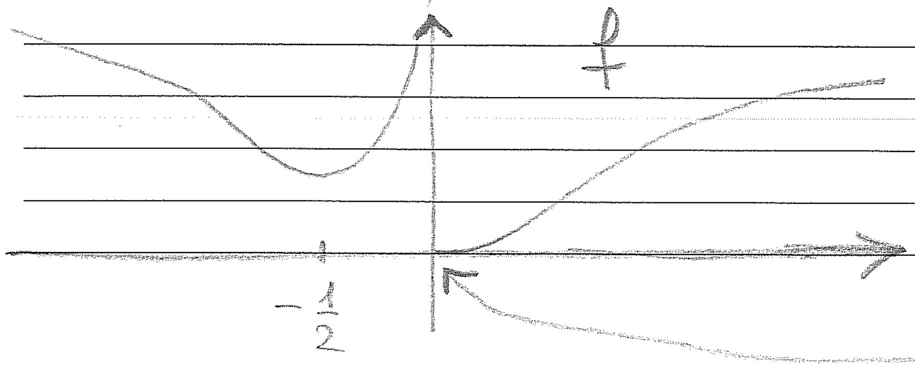
asintoto verticale a 0^-

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{\underbrace{x^2}_{0} \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{0}} = 0 \text{ perché } \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

$$f'(x) = \left(\left(x^2 e^{-\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^2 e^{-\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}-1}\left[2x e^{-\frac{1}{x}} + x^2 e^{-\frac{1}{x}}(-1)(-1)x^{-2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 e^{-\frac{1}{x}}\right)^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{1}{x}}\left[2x + 1\right] = \frac{2x+1}{3}\sqrt[3]{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}}$$

		$-\frac{1}{2}$		0	
$f(x)$	↘		↗		↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$



$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$