Analisi Matematica 1, Scritto 2-B. Durata della prova: 2 ore 18.2.13

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

Canale			
A	B	C	D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Enunciare il criterio della radice per le serie a termini positivi.

(ii) Fare un esempio di una serie convergente e tale che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

Risposta

(i) $a_n > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \begin{cases} < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \\ > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge ; $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \longrightarrow 1$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di integrale improprio di una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su un intervallo illimitato $[a, +\infty)$.

(ii) Sia $I = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$. Allora ... (motivare la risposta)

[a] $I = 0$ [b] $I = -\ln(\ln 3)$ [c] I diverge [d] I non si può calcolare

Risposta

(i) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

(ii) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_3^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln(\ln x)\Big]_{x=3}^{x=b} =$

$= \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln(\ln b) - \ln(\ln 3)\Big] = +\infty$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \sin\left(\frac{n^2}{n!}\right) = 0$$

Risoluzione

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n^2}{1\times 2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n} = \underbrace{\frac{1}{1\times 2\times\cdots\times(n-2)}}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\downarrow\, 1} \longrightarrow 0$$

$$n^3 \sin\left(\frac{n^2}{n!}\right) = n^3\frac{n^2}{n!}\ \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{n^2}{n!}\right)}{\frac{n^2}{n!}}}_{\to 1}$$

$$\| $$

$$\frac{n^5}{n!} = \underbrace{\frac{1}{1\times 2\times\cdots\times(n-5)}}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\frac{n^4}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}}_{\downarrow\, 1}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\quad 3x\le y\le 6\}$. Calcolare l'integrale $\iint_D e^{y^2}\,dx\,dy$.

Risoluzione

Vedere compito 2-A

Esercizio 3

[4 punti]

Trovare i punti (x, y) che annullano il gradiente della funzione $f(x, y) = ye^{y-x^2}$.

Risoluzione $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y e^{y-x^2}(-2x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{y-x^2} + y e^{y-x^2}$

$$\text{grad} f(x,y) = \left(-2xy\, e^{y-x^2}, (1+y)\, e^{y-x^2}\right)$$

gradiente nullo $\iff \begin{cases} -2xy\, e^{y-x^2} = 0 \\ (1+y)\, e^{y-x^2} = 0 \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$$(0, -1) \leftarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x = 0 \\ -1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 0 \\ 1 + y = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità e la derivabilità in $(1, +\infty)$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x-1)}{x-2} & \text{se } x \neq 2, \\ 1 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Risoluzione $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\ln(1+(x-2))}{x-2} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

quindi f è continua in $x=2$;
in $(1,2)$ $f(x)$ è continua perché coincide con $\frac{\ln(x-1)}{x-2}$ e $(1,2)$ è un intervallo aperto;
stesso discorso in $(2,+\infty)$.

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right)' = \frac{\frac{1}{x-1}(x-2) - [\ln(x-1)]1}{(x-2)^2}$$

per $x \in (1,2)$ e per $x \in (2,+\infty)$.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{\ln(x-1)}{x-2} - 1}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1) - (x-2)}{(x-2)^2} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1} - 1}{2(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1-(x-1)}{2(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{2(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2(x-1)} = \frac{-1}{2}$$

Esercizio 5 [7 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2 e^{\frac{1}{x}}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $x \neq 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^2 \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{e^0 = 1}} = +\infty$$ non ci sono asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 e^{\frac{1}{x}}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x^3}} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}} = 0$$

non ci sono asintoti obliqui

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x^2 e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \lim_{t \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{e^t}{t}} = +\infty$$

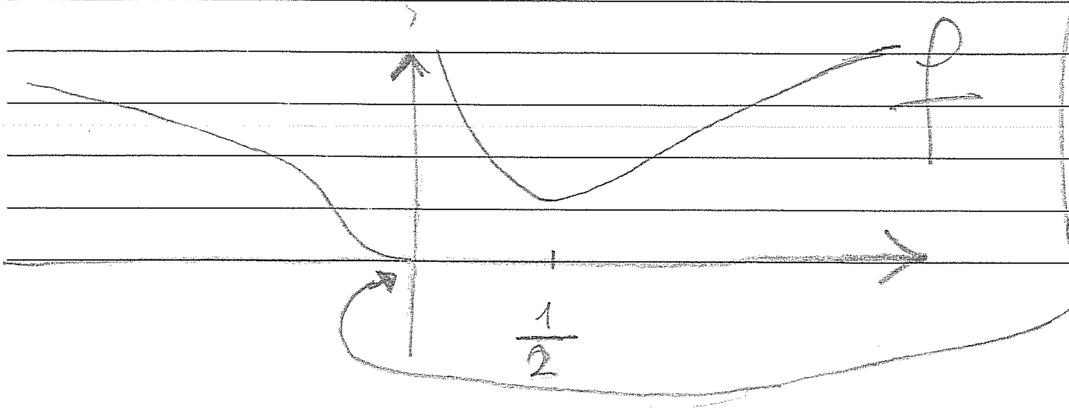
asintoto verticale a 0^+

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{\underbrace{x^2}_{0} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{0}} = 0 \quad \text{perchè} \quad \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

$$f'(x) = \left(\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}-1}\left[2x e^{\frac{1}{x}} + x^2 e^{\frac{1}{x}}(-1)x^{-2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{1}{x}}\left[2x - 1\right] = \frac{2x-1}{3}\sqrt[3]{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}}$$

		0		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	↘		↘		↗
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$



$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$