## Esercizio 5 [5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6y\sin(x)+4x^2+4y^2}{x^2+y^2} + 2y & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 4 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**Risoluzione**

$$f(x,mx) = \frac{6mx\sin(x) + 4x^2 + 4m^2x^2}{x^2+m^2x^2} + 2mx =$$

$$= \frac{6m}{1+m^2}\,\frac{\sin(x)}{x} + 4 + 2mx$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{6m}{1+m^2} + 4$$ dipende da $m$

quindi non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

allora $f$ non è continua in $(0,0)$

quindi $f$ non è differenziabile in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}} = 0$$

$$\| \quad \frac{\frac{6\cdot 0\cdot \sin(h) + 4h^2 + 4\cdot 0^2}{h^2+0^2} + 2\cdot 0 - 4}{h} = \frac{\frac{4h^2}{h^2} - 4}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}} = 2$$

$$\| \quad \frac{\frac{6h\sin(0) + 4\cdot 0^2 + 4h^2}{0^2+h^2} + 2h - 4}{h} = \frac{\frac{4h^2}{h^2} + 2h - 4}{h} = 2$$

Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 8.1.14

Firma: ..........................

Cognome .............................. Nome .................................... A.A. .........

Matricola .................................... Corso di Laurea ..............................

| D1 | |
|---|---|
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| $\Sigma$ | |

## Domanda 1 [4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$.

(ii) Dare un esempio di una successione $a_n$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 7$.

**Risposta**

(i) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|3 - a_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$

(ii) $a_n = 7 + \frac{1}{1+n}$

## Domanda 2 [4 punti]

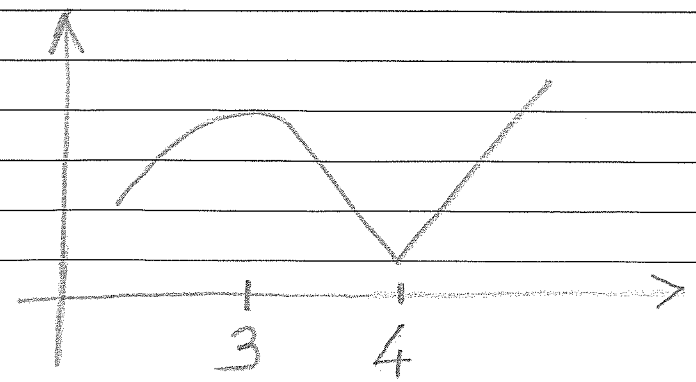
(i) Dare la definizione di derivata prima in $x_0$ per $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione con derivata prima uguale a 0 in $x = 3$ che non è derivabile in $x = 4$.

**Risposta**

(i) $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(ii)



## Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^5 \sin\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

**Risoluzione** Criterio del confronto asintotico

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5 \sin\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\sin\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^6}}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} n^5 \sin\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$ diverge

## Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^{-1} \frac{1}{x^4}\,dx =$$

**Risoluzione**

$$= \lim_{c\to-\infty} \left[\frac{1}{-3x^3}\right]_{x=c}^{x=-1} =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \left(\frac{1}{-3(-1)^3} - \frac{1}{-3c^3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{-3x^3}\right)' = \frac{1}{x^4}}$$

## Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,2)$ alla funzione $f(x,y) = 2 + xy + \ln(3 + x^2 + y^2)$.

**Risoluzione** $p(x,y) = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2)$

$$f(1,2) = 2 + 1\cdot 2 + \ln(3+1^2+2^2) = 4 + \ln 8$$

$$f'_x(x,y) = y + \frac{1}{3+x^2+y^2}\,2x \;;\; f'_x(1,2) = 2 + \frac{1}{3+1^2+2^2}\,2\cdot 1 = 2 + \frac{2}{8} = \frac{9}{4}$$

$$f'_y(x,y) = x + \frac{1}{3+x^2+y^2}\,2y \;;\; f'_y(1,2) = 1 + \frac{1}{3+1^2+2^2}\,2\cdot 2 = 1 + \frac{4}{8} = \frac{3}{2}$$

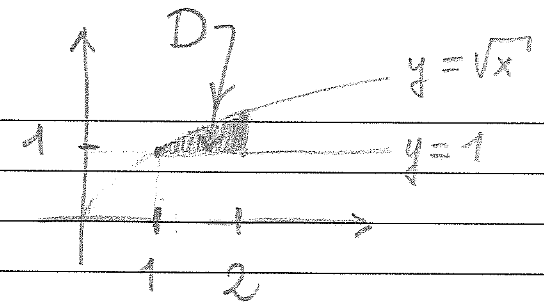
$$p(x,y) = 4 + \ln 8 + \frac{9}{4}(x-1) + \frac{3}{2}(y-2)$$

## Esercizio 4

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\quad 1 \le y \le \sqrt{x}\}$. Calcolare l'integrale $\iint_D 2xy\,dxdy = *$

**Risoluzione**




$$* = \int_1^2 \left(\int_1^{\sqrt{x}} 2xy\,dy\right) dx = \int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$\left[xy^2\right]_{y=1}^{y=\sqrt{x}} = x(\sqrt{x})^2 - x\cdot 1^2 = x^2 - x$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{14-9}{6} = \frac{5}{6}$$