Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4y\sin(x)+6x^2+6y^2}{x^2+y^2} + 5y & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 6 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

$$f(x,mx) = \frac{4mx\sin(x) + 6x^2 + 6m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} + 5mx =$$

$$= \frac{4m}{1+m^2}\frac{\sin(x)}{x} + 6 + 5mx$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{4m}{1+m^2} + 6$$ dipende da m

quindi non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

allora f non è continua in $(0,0)$

quindi f non è differenziabile in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}} = 0$$

$$\| \quad \frac{\frac{4\cdot 0\cdot \sin(h) + 6h^2 + 6\cdot 0^2}{h^2+0^2} + 5\cdot 0 - 6}{h} = \frac{\frac{6h^2}{h^2} - 6}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}} = 5$$

$$\| \quad \frac{\frac{4h\sin(0) + 6\cdot 0^2 + 6h^2}{0^2+h^2} + 5h - 6}{h} = \frac{\frac{6h^2}{h^2} + 5h - 6}{h} = 5$$

Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **8.1.14**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Dare un esempio di una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Risposta

(i) Per ogni $M>0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$a_n > M$ per ogni $n \geq n_0$

(ii) $a_n = -n$

Domanda 2

[4 punti]

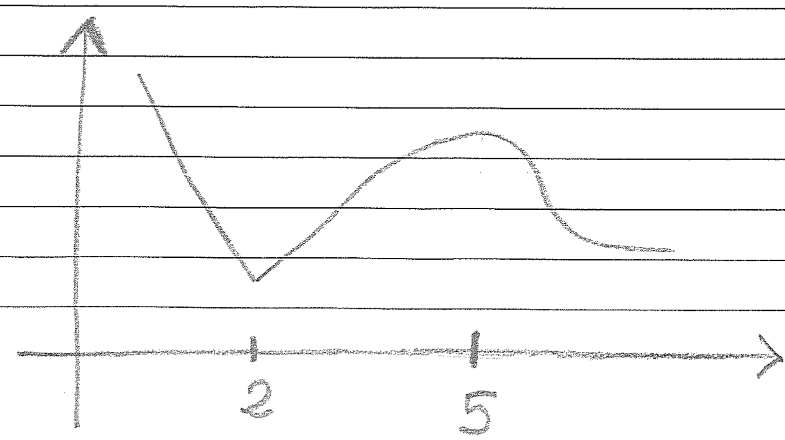
(i) Dare la definizione di derivata prima in x_0 per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione che non è derivabile in $x = 2$ con derivata prima uguale a 0 in $x = 5$.

Risposta

(i) $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(ii)



Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^7 \left(1 - e^{(1/n^4)}\right)^2$$

Risoluzione

Criterio del confronto asintotico

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7\left(1-e^{(1/n^4)}\right)^2}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n^4}}-1\right)^2}{\frac{1}{n^8}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{n^4}}-1}{\frac{1}{n^4}}\right)^2 = 1$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} n^7\left(1-e^{(1/n^4)}\right)^2$ diverge

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^6}\,dx = \lim_{C\to-\infty} \int_C^{-1} \frac{1}{x^6}\,dx =$$

Risoluzione

$$= \lim_{C\to-\infty} \left[\frac{1}{-5x^5}\right]_{x=C}^{x=-1} =$$

$$= \lim_{C\to-\infty} \left(\frac{1}{-5(-1)^5} - \frac{1}{-5C^5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{-5x^5}\right)' = \frac{1}{x^6}}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(2,1)$ alla funzione $f(x,y) = 5 + xy + \ln(7 + x^2 + y^2)$.

Risoluzione $P(x,y) = f(2,1) + f'_x(2,1)(x-2) + f'_y(2,1)(y-1)$

$$f(2,1) = 5 + 2\cdot 1 + \ln(7+2^2+1^2) = 7 + \ln(12)$$

$$f'_x(x,y) = y + \frac{1}{7+x^2+y^2}\,2x; \quad f'_x(2,1) = 1 + \frac{1}{7+2^2+1^2}\,2\cdot 2 = 1 + \frac{4}{12} = \frac{4}{3}$$

$$f'_y(x,y) = x + \frac{1}{7+x^2+y^2}\,2y; \quad f'_y(2,1) = 2 + \frac{1}{7+2^2+1^2}\,2\cdot 1 = 2 + \frac{2}{12} = \frac{13}{6}$$

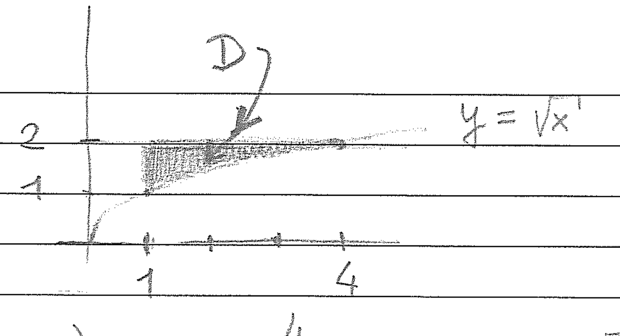
$$P(x,y) = 7 + \ln(12) + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{13}{6}(y-1)$$

Esercizio 4

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 4, \ \sqrt{x} \le y \le 2\}$. Calcolare l'integrale $\iint_D 2xy\,dxdy = *$

Risoluzione



$$* = \int_1^4 \underbrace{\left(\int_{\sqrt{x}}^2 2xy\,dy\right)}_{} dx = \int_1^4 (4x - x^2)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=4} =$$

$$\left[xy^2\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=2} = x2^2 - x(\sqrt{x})^2 = 4x - x^2$$

$$= \left(2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2\cdot 1^2 - \frac{1^3}{3}\right) = 32 - \frac{64}{3} - \left(2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 30 - \frac{63}{3} = 30 - 21 = 9$$