Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 15.2.10

Domanda 1 [3+2 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie numerica (definendo la successione delle ridotte n-esime).

(ii) Descrivere il comportamento della serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) Data una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ definiamo per $n \in \mathbb{N}$ la ridotta n-esima $S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Allora si dice che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alla somma $s \in \mathbb{R}$ (cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$) se

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = s.$$

(ii) La serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q \geq 1 \\ \text{converge } \left(\text{a } \frac{q}{1-q}\right) & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{è irregolare} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Domanda 2 ~~(Tra parentesi in alternativa per gli immatricolati del a.a.08/09)~~ [2+3 punti]

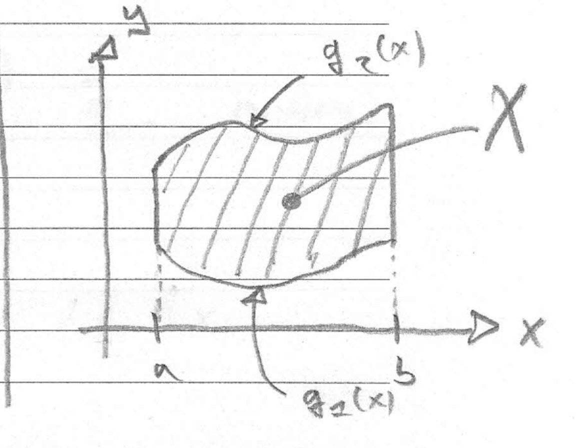
(i) Dare la definizione di dominio y-semplice. ~~(Dare la definizione di massimo locale per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)~~

(ii) Enunciare il teorema di Fubini-Tonelli per domini y-semplici. ~~(Enunciare il Teorema di Fermat)~~

Risposta

(i) $X \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice y-semplice, se esistono $a<b$ e $g_1, g_2 \in C[a,b]$ tale che

$$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$



(ii) Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua e X è y-semplice, allora f è integrabile e

$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora

- ~~a~~ Se $f'(0) = 0$, allora $|f|$ é derivabile in 0
- b $|f|$ non é derivabile in 0
- c Se $|f|$ é derivabile in 0, allora $f(0) = 0$
- d $|f|$ é derivabile in 0

Risoluzione

cfr. compito 1-B

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente. Allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è

- a convergente
- b divergente
- c oscillante
- ~~d~~ limitata

Risoluzione

cfr. compito 1-B

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é una funzione derivabile in $(0,0)$ con $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni é *vera*

- ~~a~~ il piano tangente in $(0,0)$ ha equazione $z = f(0,0)$
- b $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ per ogni versore v
- c $f(x,y) = f(0,0) + o(\|(x,y)\|)$ per $(x,y) \to (0,0)$
- d f é continua in $(0,0)$

Risoluzione

L'equazione del piano tangente in $(0,0)$ è

$$p(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y$$

$$\underset{\text{ipotesi}}{=} f(0,0) = z.$$

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{\cos(x)-1} = 2$$

Risoluzione

per $x \to 0$ vale: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$

Quindi dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 2° ordine:

- $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) \overset{t=2x}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \sqrt{1+2x}$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \sqrt{1+2x} - e^x = \cancel{1} \cancel{+x} - \frac{x^2}{2} \cancel{-1} \cancel{-x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$= -x^2 + o(x^2) \sim x^2$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{\cos(x)-1} \sim \frac{-x^2}{-\frac{x^2}{2}} = 2 = \text{limite}$

Esercizio 5 [4 punti]

Calcolare

$$\int_{1/e}^{1} \ln^2(x)dx = I$$

Risoluzione

$$I = \int_{1/e}^{1} \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\ln^2(x)}\, dx \overset{\text{i.p.p.}}{=} \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\ln^2(x)}\Big|_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} \underset{f \cdot g'}{x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}\, dx$$

$$= -\frac{1}{e} \cdot (-1)^2 - 2\int_{1/e}^{1} \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\ln(x)}\, dx$$

$$= -\frac{1}{e} - 2\left(\underset{f \cdot g}{x \cdot \ln(x)}\Big|_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} \underset{f \cdot g'}{x \cdot \frac{1}{x}}\, dx \right)$$

$$= -\frac{1}{e} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{e}(-1) - \left(1 - \frac{1}{e}\right)\right) = -\frac{1}{e} - 2\left(\frac{2}{e} - 1\right)$$

$$= -\frac{5}{e} + 2 = 2 - \frac{5}{e}$$

Esercizio 6 [5 punti]

Trovare inf, sup, max, min di $f(x) = 2^{|x-x^2|}$ in $(-1, 1)$.

Risoluzione

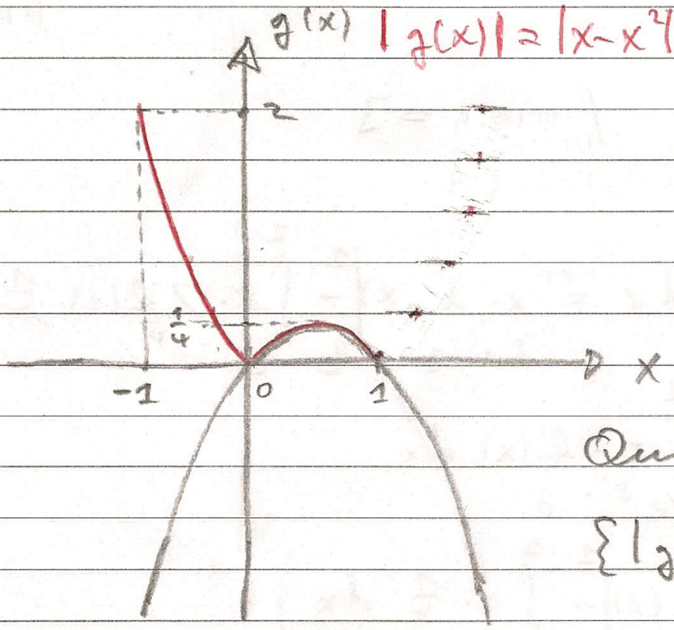
Consideriamo prima $g(x) = x - x^2 = x \cdot (1-x)$

Il grafico di g è una parabola aperta verso il basso

con $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $x = 1$. Inoltre $g(-1) =$

$= -1 - (-1)^2 = -2$ e per simmetria (o usando Fermat)

$g(x)$ ha un pto. di massimo in $x = 1/2$ con $g(1/2) = 1/4$



Quindi risulta che

$\{|g(x)| : x \in (-1,1)\} = [0,2)$

Visto che la funzione $h(t) = 2^t$, $t \in \mathbb{R}$, è

(strett.) crescente segue per $f(x) = h(\underbrace{|g(x)|}_{=t})$

$$\{f(x) \mid x \in (-1,1)\} = \{h(t) \mid t \in [0,2)\}$$
$$= [h(0), h(2)) = [2^0, 2^2)$$
$$= [1, 4)$$

$\Rightarrow$ $\inf f = \min f = 1$,

$\sup f = 4$, $\max f$ non esiste.