Analisi Matematica 1, Scritto 2-B. Durata della prova: 2 ore 15.2.10

Domanda 1 [3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

(ii) Descrivere il comportamento della successione $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$a_n \leq M \ \forall n \geq n_0$

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Domanda 2 [3+2 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in (x_0, y_0).

(ii) Scrivere l'equazione del piano tangente $p(x, y)$ a $f(x, y) = e^{x^2 y} + xy^2$ in $(0, 3)$.

Risposta

(i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \iff \exists A \in \mathbb{R}^2$

t.c. $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + A\cdot(h,k) + o(\sqrt{h^2+k^2})$

per $(h,k) \to (0,0)$

prodotto scalare

in questo caso $A = \text{grad} f(x_0, y_0)$.

(ii) $f(0,3) = e^0 = 1$

$f_x(x,y) = e^{x^2 \cdot y} \cdot 2xy + y^2 \Rightarrow f_x(0,3) = 9$

$f_y(x,y) = e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2 + 2xy \Rightarrow f_y(0,3) = 0$

$\Rightarrow p(x,y) = f(0,3) + f_x(0,3)\cdot(x-0) + f_y(0,3)\cdot(y-3)$

$= 1 + 9\cdot x + 0\cdot(y-3) = \underline{\underline{1 + 9x}}$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora quale delle seguenti affermazioni é *falsa*

[a] f é integrabile in $[0, e]$ [~~b~~] $|f|$ é derivabile in $\mathbb{R}$ eccetto al piú un numero finito di punti.

[c] $|f|$ é continua in $x = 3$ [d] f ha massimo in $[0, 1]$

Risoluzione

Cfr. Compito 2-A

Esercizio 2

[3 punti]

Per quale delle seguenti successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale $a_n \sim 3^n$ per $n \to +\infty$?

[a] $a_n = 3^n/n!$ [b] $a_n = n^3 + \ln(3n^n)$ [~~c~~] $a_n = n^3 + 3^n$ [d] $a_n = 3^n + 5^n$

Risoluzione

$\frac{n^3+3^n}{3^n} = 1 + \frac{n^3}{3^n} \to 1+0$ per $n \to +\infty$

quindi $n^3+3^n \sim 3^n$ per $n \to +\infty$

Esercizio 3

[3 punti]

La formula

$$\int_{-1}^{1} f(x)f''(x)\,dx \leq 0 \qquad \text{ove } f \in C^2[-1,1] \text{ è}$$

[a] vera per ogni f [~~b~~] vera se $f'(-1) = f'(1) = 0$

[c] vera se f è pari [d] falsa per ogni f

(Suggerimento: Utilizzare integrazione per parti)

Risoluzione

Cfr. Compito 2-A

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\underline{\underline{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sin(x) - \ln(1+x)) - x^3}{\sin(x^4) \sim x^4}$$

Risoluzione

Quindi si deve sviluppare il numeratore fino al 4° ordine:

- $2x\cdot\sin(x) = 2x\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 2x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$
- $2x\cdot\ln(1+x) = 2x\cdot\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = 2x^2 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

$\Rightarrow 2x(\sin(x) - \ln(1+x)) - x^3 = \cancel{2x^2} - \frac{x^4}{3} - \cancel{2x^2} + \cancel{x^3} - \frac{2}{3}x^4 - \cancel{x^3} + o(x^4)$

$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)x^4 + o(x^4) = -x^4 + o(x^4)$

$\sim -x^4$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \dfrac{2x(\sin(x) - \ln(1+x)) - x^3}{\sin(x^4)} \sim \dfrac{-x^4}{x^4} = -1$

$=$ limite

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 - 4x + 5}\, dx$$

Risoluzione

Il discriminante di $p(x) = x^2 - 4x + 5$ è dato da

$(-4)^2 - 4\cdot 5 < 0 \Rightarrow p(x)$ non ha zeri ($\Rightarrow$ caso iii appunti)

Allora, $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow$

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2-4x+5}\, dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2+1}\, dx = \arctan(x-2)\Big|_2^3$$

$$= \arctan(1) - \arctan(0)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare dominio X, zeri, limiti alla frontiera di X, estremi locali e concavità della funzione $f(x) = x \cdot \ln^2(x)$ tracciandone un grafico approssimativo.

Risoluzione

Cfr. compito 2-A