Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore 14.02.2019

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare un esempio di successione negativa e infinitesima.

(ii) Dare un esempio di serie convergente semplicemente ma non assolutamente.

Risposta

(i) $\left(\frac{-1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(ii) La serie di Leibniz $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = 4\,e^x - 5$ ammette uno zero in $[0, 2]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ con $f(a)\cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$.

(ii)
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f: [0,2] \to \mathbb{R} \text{ è continua} \\ \bullet\ f(0) = 4\cdot e^0 - 5 = -1 < 0 \\ \bullet\ f(2) = 4\cdot e^2 - 5 > 4\cdot 2^2 - 5 > 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{teorema degli zeri}} \exists\, c \in (0,2) \text{ con } f(c) = 0$$

($\underline{\text{NB}}$: $c = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$)

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1+4n^5}{2+n^2+8n^5}\right)^n =: a_n$$

Risoluzione

Si usa il criterio della radice:

- $a_n \geq 0 \ \forall\, n \geq 1$
- $\sqrt[n]{a_n} = \frac{-1+4n^5}{2+n^2+8n^5} \sim \frac{4n^5}{8n^5} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} = q < 1$

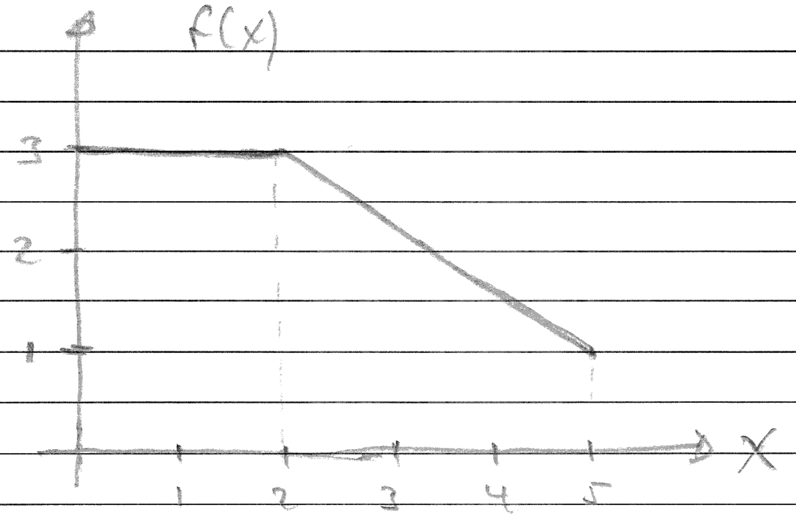
$\Rightarrow$ la serie S converge.

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ continua, tale che $f(0) = 3$, $f'(x) = 0$ in $(0,2)$, $f'(x) < 0$ in $(2,3)$, $f(5) = 1$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(e^{3x^2}-1)\cdot y^2}{2x} & \text{se } x \neq 0,\ y \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

Risoluzione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1)-f(0,1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(e^{3h^2}-1)\cdot 1^2}{2h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{3h^2}-1}{3h^2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\frac{e^{3h^2}-1}{3h^2} \to 1$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+xy)^{3/2}-1}{x^2+y^2} =: f(x,y)$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+mx^2)^{3/2}-1}{(1+m^2)\cdot x^2} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}\cdot (1+mx^2)^{1/2} \cdot \cancel{2x}\cdot m}{(1+m^2)\cdot \cancel{2x}}$$

$$(1+mx^2)^{1/2} \to 1$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{m}{1+m^2} \quad \text{dipende da } m$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ __non__ esiste.

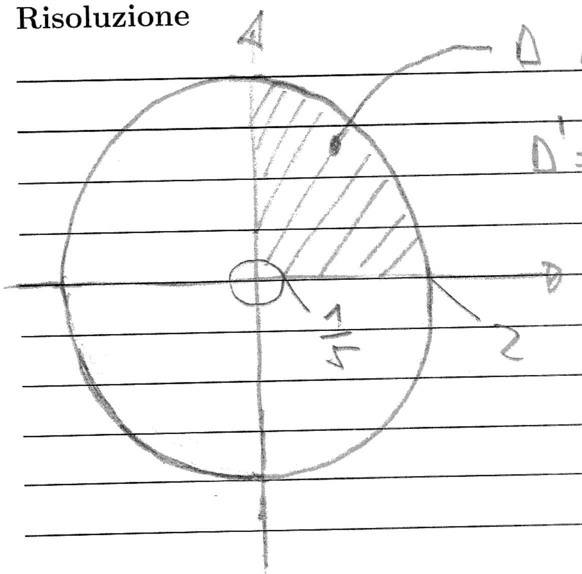
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{25} \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x > 0,\ y > 0\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{x + 3y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy.$$

Risoluzione



D corrisponde a

$D' = \{(\rho, \vartheta) \mid \rho \in (\frac{1}{5}, 2),\ \vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$

in coordinate polari.

Quindi passando alle coord. polari si ha

$$I = \int_{\rho=\frac{1}{5}}^{2} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{\rho \cdot \cos\vartheta + 3\rho \cdot \sin\vartheta}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho}\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_{1/5}^{2} \rho\, d\rho \cdot \int_{0}^{\pi/2} \cos\vartheta + 3 \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{1/5}^{2} \cdot \left[\sin\vartheta - 3\cos\vartheta\right]_{0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^2 - \frac{1}{5^2}\right) \cdot \left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} - 3\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0} + 3\underbrace{\cos 0}_{=1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(4 - \frac{1}{25}\right) \cdot 4 = 2 \cdot \left(4 - \frac{1}{25}\right) = \frac{198}{25}$$