Disegnare il dominio

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq x - y \leq 2\right\}$$

nel piano xy e calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{x-y}{1+(x+y)^2}\, dx\, dy.$$

(Si consiglia di usare un opportuno cambiamento di variabili.)

Sol: Camb. di variabili

$u := x + y$, $v = x - y$

Risultato: $\frac{\pi}{2}$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

Sia $f(x) = x^6 + 6x + 1$ e $p(x)$ il suo polinomio di Taylor di ordine 8 centrato in $x_0 = 0$. Allora, $p(-1)$ vale

$\boxed{a}$ 4	$\boxed{b}$ 1
$\boxed{c}$ -4	$\boxed{d}$ 0

<u>Sol:</u> $p(x) = f(x) \Rightarrow p(-1) = -4$

(i) Enunciare il *Teorema di Rolle.*

(ii) Mostrare con un esempio (anche grafico) che, nel teorema precedente, la derivabilità della funzione sull'intervallo aperto é necessaria.

<u>Sol:</u> $f(x) = |x|$ per $x \in [-1, 1]$

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

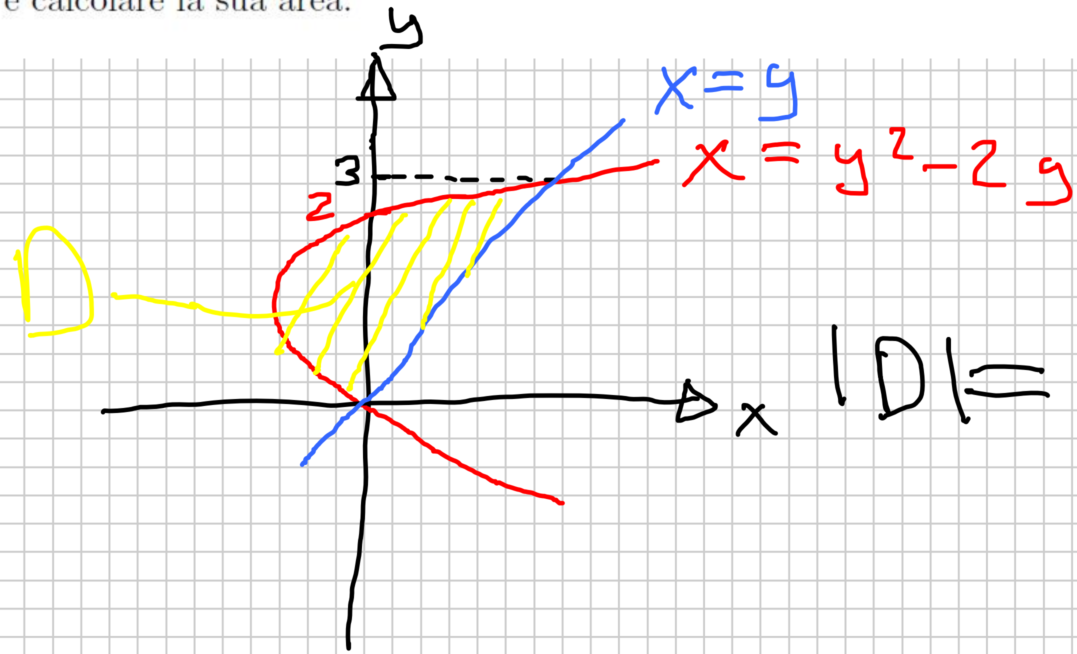
(ii) Verificare che la funzione $f(x) = 3\,e^{-5x} - 2x$ ha uno zero positivo.

Sol: $f(0) = 3 > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow \exists\, c > 0 : f(c) = 0$$

Disegnare il dominio D limitato dalla parabola $x = y^2 - 2y$ e dalla retta $x - y = 0$ e calcolare la sua area.



$$|D| = \frac{9}{2}$$

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Se esiste un $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$, allora

- [a] $f(a) = f(b)$
- [b] f non è iniettiva
- [c] f è suriettiva
- [~~d~~] f è limitata

Sol: f deriv. $\Rightarrow$ f cont. $\Rightarrow$ d) per Weierstraß

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esiste un $c \in (a, b)$ per cui $f(c) = 0$, allora

- [a] $f(a) \cdot f(b) < 0$
- [b] f non è derivabile in c
- [c] f ha un punto di minimo locale in $x = c$
- [~~d~~] nessuna delle precedenti

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Allora quale delle seguenti affermazioni é *falsa*

$\boxed{\text{a}}$ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

$\boxed{\text{b}}$ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\boxed{\text{c}}$ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

$\boxed{\text{d}}$ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge

Sol: $\sum a_n$ conv. $\Rightarrow a_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$

$\Rightarrow a_n \leq 1$ definitivamente

$\Rightarrow a_n^2 \leq a_n$ —— " ——

$\Rightarrow$ d) per il criterio del confronto

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\big(\sin(2x)\big) - 1}{e^{(x^2)} - 1} = -1$$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$. Allora $f(1)$ vale

$\boxed{\text{a}}$	4	$\boxed{\text{b}}$	3
$\boxed{\cancel{\text{c}}}$	5	$\boxed{\text{d}}$	1

Sol. Con il teorema fond. calc. integrale

segue $f(x) = (x^2(1+x))' = 2x + 3x^2$

$\Rightarrow f(1) = 5$

Trovare l'equazione del piano tangente p al grafico di $f(x, y) = x^2 + xy$ nel punto $(-1, 1)$. $= (x_0, y_0)$

Sol: $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)$
$+ f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

$= \dots = -x-y$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $$f(x,y) := \begin{cases} 6x + y & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Allora

- [a] $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste
- [~~b~~] $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- [c] $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$
- [d] nessuna delle precedenti

Usare la definizione di

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{=0}{f(0,h)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{h}$$

Calcolare la matrice Jacobiana di $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 2x + e^{xy} \end{pmatrix}$.

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & ; & x \\ 2 + e^{x \cdot y} \cdot y & ; & e^{x \cdot y} \cdot x \end{pmatrix}$$

Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y) = x \cdot e^{y-1} + y$ nella direzione del versore $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{=: v}$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

$$D_v f(1,1) = \operatorname{grad} f(1,1) \cdot v$$

$$= (1,2) \cdot v = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Trovare α tale che il seguente limite esiste finito e diverso da zero

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin^2(x) - x^2)^5}{(\ln(1+x))^\alpha}.$$

$\alpha = \boxed{20}$

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ove

a $b_n = 3^n\|a_n\|$, non converge	b $b_n = n\|a_n\|$, non converge
c $b_n = \frac{\|a_n\|}{n^{1/4}}$, converge	~~d~~ $b_n = \|a_n\|^n$, converge

<u>Sol:</u> Usare il criterio della radice

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sinh(x)} - 1 - x + \frac{x^2}{2}}{1 - \cos(3x)} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

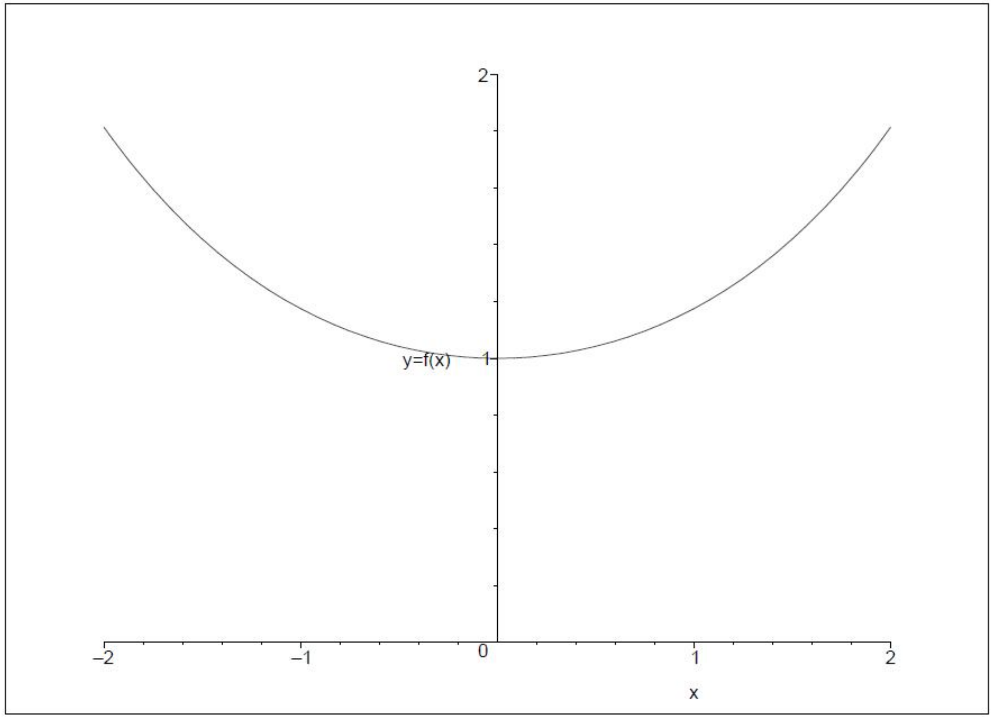
La curva in figura è parte del grafico di

$\boxed{\text{a}}$ $f(x) = 1 + |x|^{\frac{4}{5}}$

$\boxed{\text{b}}$ $f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|}$

$\boxed{\text{c}}$ $f(x) = \frac{\sinh(x)}{x}$

$\boxed{\text{d}}$ $f(x) = 1 - x^2$



Sia $a_n > 0$ tale che $(n+1)a_{n+1} = a_n$. Allora

a) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

~~b)~~ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

c) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è oscillante

d) $a_n \sim \frac{1}{e^n}$ per $n \to \infty$

Sol:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \to 0 = q < 1$$

$\Rightarrow$ b) per il criterio del rapporto

Siano f, g due funzioni tali che il loro prodotto $f \cdot g$ é derivabile in $x = 0$. Allora

[a] f e g sono derivabili in $x = 0$

[b] f e g sono continue in $x = 0$

~~[c]~~ Esiste finito $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)g(h) - f(0)g(0)}{h}$

[d] Nessuna delle risposte precedenti é vera

rapp. increm.

di $f \cdot g$ in $x = 0$

Sia $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ continua con $f(2) = 0$ e $f(3) = 1$. Allora per $J = \{f(x) : x \in [2,3]\}$ si ha

$\boxed{\text{a}}$ $J = [0,1]$

$\boxed{\text{b}}$ $J \supseteq [0,1]$

$\boxed{\text{c}}$ $J \subseteq [0,1]$

$\boxed{\text{d}}$ $J = [2,3]$

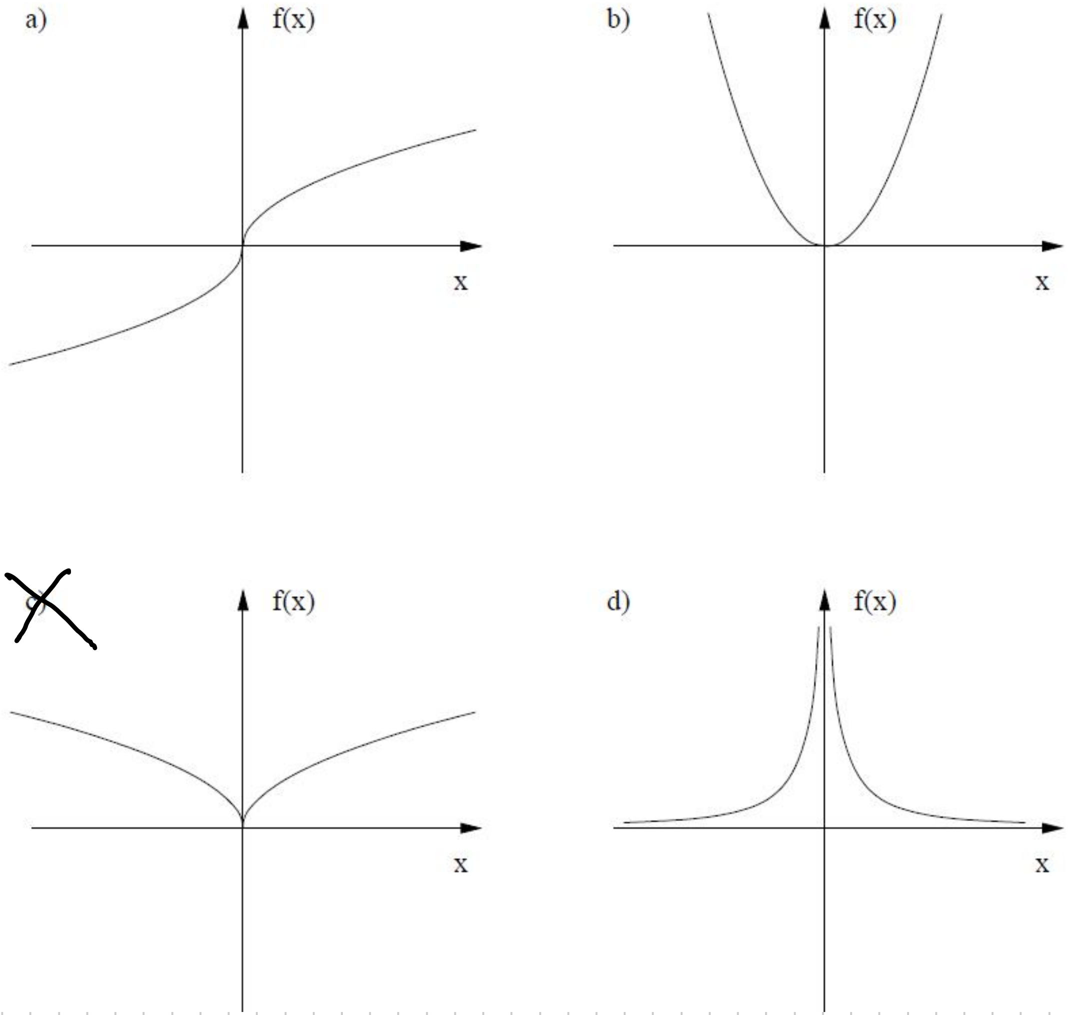
per il teorema dei valori intermedi

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - e^x + x}{\sin(2x) + 2\ln(1-x)} = \boxed{5/2}$$

Risoluzione

Parte del grafico di $f(x) = |x|^{\frac{\pi}{4}}$ è dato da



Usare

$0 < \frac{\pi}{4} < 1$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare tale che $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$. Allora $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^3(x)}$

$\boxed{\cancel{\text{a}}}$ vale 0

$\boxed{\text{b}}$ vale $\frac{1}{3!}$

$\boxed{\text{c}}$ non esiste

$\boxed{\text{d}}$ vale $+\infty$.

<u>Sol:</u> $\dfrac{f(x)}{\sin^3(x)} \sim \dfrac{f(x)}{x^3}$ per $x \to 0$

Ora con l'Hospital segue

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \dots = \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{6} = 0$$

Calcolare, se esiste, il limite

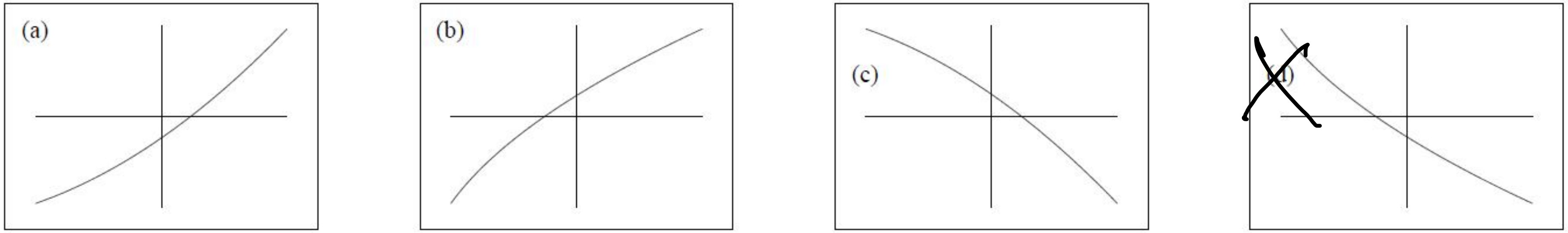
$$\lim_{x\to 0}(1-3x^2)^{\frac{1}{1-\cos(2x)}} = e^{-\frac{3}{2}}$$

Risoluzione

$$= e^{\frac{\ln(1-3x^2)}{1-\cos(2x)}} \quad e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x^2)}{1-\cos(2x)} = -\frac{3}{2}$$

Sia $f \in C(\mathbb{R})$ tale che $f'(x) = -4\,e^{3f(x)} < 0$. Allora, parte del grafico di f è



(Suggerimento: Studiare il segno di f' e f''.)

f è decrescente $\Rightarrow$ non a), b).

Inoltre, $f''(x) = \underbrace{-4\,e^{3\cdot f(x)}}_{<0} \cdot \underbrace{3f'(x)}_{<0} > 0$

$\Rightarrow$ f è convessa

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \ln^8\left(1+\sqrt{2}\cdot n^{-\frac{1}{4}}\right) = \boxed{16}$$

$$\sim \left(\sqrt{2}\cdot n^{-\frac{1}{4}}\right)^8 = 16 \cdot n^{-2}$$