Analisi Matematica I (A.A. 2010/2011)

Docente: Klaus Engel

Esercizi su
Calcolo Differenziale ed Integrale di Funzioni di più Variabili

Esercizio 1. Negli esercizi (a)–(f) calcolare il limite indicato o spiegare perchè non esiste.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-3}{x-y}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$, (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$,

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$, (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+y^2}{4x-y}$, (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy(y^2-x^2)}{x^2+y^2}$.

Esercizio 2. Calcolare il gradiente della funzione f per

(a) $f(x,y,z) = x^2 \cdot z + y^2z + xy + 3z^3 - 1$, (b) $f(x,y) = \cos(x^2+y^2) \cdot e^{-x}$,

(c) $f(x,y) = \ln(1+x^2 \cdot y^2) \cdot \sinh(x-y)$, (d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot \left(x^2+2y^2\right)$.

Esercizio 3. Sia $f(x,y) := x^y$ per $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$. Calcolare

(a) il gradiente $\operatorname{grad} f(x,y)$;
(b) l'equazione $p(x,y)$ del piano tangente nel punto $P_0 := (\mathrm{e}, 1)$;
(c) la derivata direzionale $D_{v_0}(P_0)$ nel punto P_0 nella direzione $v_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$;
(d) la direzione di massima cresità della funzione f;
(e) il massimo $\max\{D_v(P_0) : v \in \mathbb{R}^2, \|v\| = 1\}$ delle derivate direzionali in P_0.

Esercizio 4. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definite come $f(x,y) = \left(x \cdot y, 2, e^{x+y}\right)^T$, $g(u,v,w) := (u^2 \cdot v, w^2)^T$.
(a) Calcolare la Jacobiana $J_f(x,y)$;
(b) calcolare la Jacobiana $J_g(u,v,w)$;
(c) calcolare $(g \circ f)(x,y)$ e la Jacobiana $J_{g\circ f}(x,y)$;
(d) verificare la regola della catena usando (a)–(c).

Esercizio 5. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{4-y}} (x+y)\; dx\, dy$$

disegnando la regione X a cui l'integrale è esteso.

Esercizio 6. Negli esercizi (a)–(h) disegnare il dominio X nel piano-xy e calcolare l'integrale doppio $\iint_X f(x,y)\,dx\,dy$.

(a) $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ 0 \le y \le \sqrt{2+x}\,\right\}, \quad f(x,y) = \sqrt{y} + xy;$

(b) $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x+y \le 1,\ 0 \le x-y \le 2\right\}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{1+(x+y)^2};$

(c) $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ -x \le y \le x\right\}, \quad f(x,y) = \frac{1}{x^2};$

(d) $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 2,\ -y \le x \le y\right\}, \quad f(x,y) = x^3 \cdot y;$

(e) $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [1,2],\ x\,y \ge 1,\ \frac{y}{x} \le 1\right\}, \quad f(x,y) = \frac{x^2}{y^2};$

(f) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,1],\ \sqrt{x} \le y \le 1\}, \quad f(x,y) = x \cdot \cos(y^5);$

(g) X il quadrilatero con i vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,1)$, $(5,0)$, $\quad f(x,y) = xy^2;$

(h) X la regione finita del primo quadrante delimitata dalla retta $2x+2y=5$ e dall'iperbole $xy=1, \quad f(x,y) = \ln(x^2).$