Istituzioni di Geometria Superiore I

# Decimo foglio di esercizi

**Esercizio 1.** Sia $X$ uno spazio topologico. Dimostrare che ogni punto di $X$ è un retratto di $X$. È sempre vero che ogni punto di $X$ è un retratto per deformazione di $X$?

**Esercizio 2.** Provare che il prodotto di due spazi contrattile è contrattile.

**Esercizio 3.** Per $n \geq 1$ si consider la sfera $n$-dimensionale $S^n$ e lo spazio toplogico

$$X := \{(p,q) \in S^n \times S^n \mid p \neq q\}.$$

(i) Si dimostri che il grafico della mappa antipodale

$$\Gamma := \{(p,q) \in S^n \times S^n \mid q = -p\}$$

è un retratto per deformazione di $X$.

(ii) Dedurne che $X$ è omotopicamente equivalente a $S^n$.

**Esercizio 4.** Dimostrare che i due cammini $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definiti da

$$\alpha(t) = (1+t)(\sin(8t), \cos(8t)), \ \ \beta(t) = (1+t^2)(\sin(8t), \cos(8t)),$$

hanno gli stessi estremi e sono omotopicamente equivalenti.

**Esercizio 5.** Dimostrare che il gruppo fondamentale del prodotto è isomorfo al prodotto dei gruppi fondamentali, ossia:

$$\pi_1(X \times Y, (a,b)) \simeq \pi_1(x,a) \times \pi_1(Y,b).$$

**Esercizio 6.** In $\mathbb{R}^3$ si considerino l'origine $O$, la retta $r$ di equazioni $x = y = 0$ e la circonferenza $\Gamma$ di euazioni $x^2 + y^2 - 1 = z = 0$. Determinare il gruppo fondamentale dei seguenti spazi:

(i) $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$;

(ii) $\mathbb{R}^3 \setminus r$;

(iii) $\mathbb{R}^3 \setminus (r \cup \Gamma)$ (suggerimento: usare che questa è una figura di rotazione intorno alla retta $r$ e usare poi l'Esercizio 5).

**Esercizio 7.** Calcolare il gruppo fondamentale di

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1)((x+1)^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0\right\}.$$

**Esercizio 8.** Calcolare il gruppo fondamentale di

$$Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4)((x+2)^2 + y^2 + z^2 - 4) = 0\right\}.$$

**Esercizio 9.** Sia $X$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dall'unione della sfera di centro l'origine e raggio 1 con l'unione dei tre piani coordinati. Determinare il gruppo fondamentale di $X$ (Suggerimento: Scrivere $X$ come l'unione dei due aperti $A := \{x \in X \mid \|x\| > 0\}$ e $B := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$).