Istituzioni di Geometria Superiore I

Quinto foglio di esercizi

Esercizio 1. Provare che l'anello delle funzioni continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ non è Noetheriano.

Esercizio 2. Si consideri un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e sia

$$f = \prod_{i=1}^{k} f_i^{n_i}$$

la sua decomposizione in irriducibili.

(i) Dimostrare che

$$\sqrt{(f)} = \left(\prod_{i=1}^{k} f_i \right).$$

(ii) Dimostrare che l'ideale (f) è primo se e solo se f è irriducibile.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$. Verificare che l'ideale (f) è massimale.

Esercizio 4. Dimostrare che lo spazio affine $\mathbb{A}^n$ dotato della topologia di Zariski è quasi-compatto, cioè ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito (N.B.: Uno spazio topologico è dettto compatto se è quasi compatto e T2).

Esercizio 5. $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è irriducibile?

Esercizio 6. Dimostrare che uno spazio topologico irriducibile è connesso. Vale anche il viceversa?

Esercizio 7. Verificare se l'ideale $I = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \mathbb{C}[x, y]$ è radicale.

Esercizio 8. (i) Dimostrare che l'ideale dell' origine $(0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n$ è l'deale $(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

(ii) Dato un qualsiasi punto $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, dimostrare che $I(P) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Esercizio 9. Si consideri l'ideale $J = (xz - y^2, z^3 - x^5) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$. L'insieme $V(J)$ è una varietà affine?

Esercizio 10. In $\mathbb{C}[x, y]$ si considerino gli ideali $J_1 = (xy, xz, yz)$ e $J_2 = (xy, (x - y)z)$.

(i) Determinare gli insiemi algebrici $V(J_1)$ e $V(J_2)$ in $\mathbb{A}^3$ e controllare se sono o meno delle varietà affini.

(ii) Dire se J_1 e J_2 sono radicali, determinando $\sqrt{J_1}$ e $\sqrt{J_2}$.

(iii) Verificare che l'ideale J_1 non può essere generato da due elementi.