Istituzioni di Geometria Superiore I

Sesto foglio di esercizi

Esercizio 1. Sia $J = (xz - y^2, z^3 - x^5) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ l'ideale dell'Esercizio 9 nel Foglio 5. Determinare le componenti irriducibili di $V(J) \subset \mathbb{A}^3$.

Esercizio 2. Si consideri l'ideale $J = (x^2 + y^2 + z^2, xy + xz + yz) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$. Determinare $V(J)$ e $I(V(J))$

Esercizio 3. Si consideri l'ideale $J = (x^2 + y^2, x^3 + xy^2 - y^3 + x^2y - x + y) \subset \mathbb{C}[x, y]$. Determinare le componenti irriducibili di $V(J) \subset \mathbb{A}^2$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ l'applicazione definita da $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ e sia $C = f(\mathbb{A}^1)$.

(i) Dimostrare che $C = V(x^3 + x^2 - y^2)$.

(ii) Dimostrare che f è una funzione regolare ma non è un isomorfismo di C con $\mathbb{A}^1$.

(iii) Determinare $K[C]$.

(iv) Dimostrare che C e $\mathbb{A}^1$ non sono isomorfi.

Esercizio 5. Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un insieme algebrico e sia $f : X \to \mathbb{A}^m$ una funzione regolare. Il grafico di f è definito come:

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{A}^{n+m} \mid x \in X\}.$$

Dimostrare che Γ_f è un insieme algebrico in $\mathbb{A}^{n+m}$ e che la proiezione $\pi : \Gamma_f \to X$ è un isomorfismo.

Esercizio 6. Verificare che la funzione regolare $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definita da $f(x, y) = (x, xy)$ non è chiusa.

Esercizio 7. Sia $f_n : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^n$ la funzione regolare definita da $f_n(t) = (t^2, t^n)$ e sia $C_n = f_n(\mathbb{A}^1)$.

(i) Determinare $I(C_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Dimostrare che per n pari $f_n : \mathbb{A}^1 \to C_n$ non è un isomorfismo, ma C_n è isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

(iii) Dimostrare che per n dispari $f_n : \mathbb{A}^1 \to C_n$ è biettiva ma non è un isomorfismo. In questo caso C_n è isomorfo a $\mathbb{A}^1$?

Esercizio 8. Dimostrare che una proiettività è un omeomorfismo di $\mathbb{P}^n$ rispetto alla topologia di Zariski.

Esercizio 9. Sia $C = V(x^2 - y, x^3 - z) \subset \mathbb{A}^3$ la cubica gobba e sia $\overline{C} \subset \mathbb{P}^3$ la chiusura di $j_0(C)$ in $\mathbb{P}^3$. Far vedere che $\overline{C}$ è strettamente contenuta nel luogo degli zeri proiettivi dell'ideale generato da $\beta(x^2 - y)$ e $\beta(x^3 - z)$. Determinare quindi $I(\overline{C})$.