Istituzioni di Geometria Superiore I

Undicesimo foglio di esercizi

Esercizio 1. Calcolare il gruppo fondamentale di un toro e di un toro meno un punto.

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^2$

$$E := (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \bigcup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}).$$

Dimostrare che E non è semplicemente connesso. (Suggerimento: Far vedere che E riveste il bouquet di due circonferenze).

Esercizio 3. Determinare il gruppo fondamentale delle seguenti quadriche in $\mathbb{R}^3$:

(i) *Iperboloide iperbolico:* $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$;

(ii) *Paraboloide ellittico:* $x^2 + y^2 - z = 0$;

(iii) *Paraboloide iperbolico:* $x^2 - y^2 - z = 0$;

(iv) *Cilindro ellittico* $x^2 + y^2 - 1 = 0$;

(v) *Cono a due falde* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Esercizio 4. Determinare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3$ meno i tre assi coordinati.

Esercizio 5. Sia $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Determinare un generatore del gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), P)$.

Esercizio 6. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ meno un punto.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^3$ si considerino il cilindro S di equazione $y^2+z^2 = 1$ e la retta r di equazioni $x = z = 0$. Determinare il gruppo fondamentale di $X = S \cup r$.

Esercizio 8. Si consideri la mappa razionale $\pi : \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ data da $\pi([x_0 : x_1 : x_2 : x_3]) = [x_0 - x_3 : x_1 : x_2]$.

(i) Determinare il dominio di π e spiegare perchè π è una proiezione.

(ii) Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ la cubica gobba (cioè l'immagine della mappa di Veronese $v_{1,3}$) e sia $C = \pi(\Gamma)$. Determinare $I_{\mathbb{P}}(C)$.

(iii) Determinare gli eventuali punti singolari di C.

(iv) Dimostrare che $\pi|_\Gamma : \Gamma \to C$ è un morfismo birazionale ma non un isomorfismo.

Esercizio 9. Si consideri l'applicazione $\Phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ definita da

$$\Phi([x_0 : x_1 : x_2 : x_3]) = [x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2]$$

e sia $Y = \overline{\Phi(\mathbb{P}^2)}$.

(i) Determinare il dominio di Φ.

(ii) Dimostrare che Φ ammette un'inversa regolare $\Phi^{-1} : Y \to \mathbb{P}^2$.

(iii) φ^{-1} è lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in un punto?