Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 8
Code di priorità

Tipo di dato `CodaPriorità` (1/2)

tipo `CodaPriorita`:

dati:

un insieme S di n elementi di tipo *elem* a cui sono associate chiavi di tipo *chiave* prese da un universo totalmente ordinato.

operazioni di base:

`findMin()` $\to$ *elem*

restituisce l'elemento in S con la chiave minima.

Si può analogamente definire la variante di coda di priorità con **`findMax`** e **`deleteMax`**

`insert`$(elem\ e, chiave\ k)$

aggiunge a S un nuovo elemento e con chiave k.

`delete`$(elem\ e)$

cancella da S l'elemento e.

Suppongo che mi venga dato un riferimento diretto all'elemento da cancellare

`deleteMin()`

cancella da S l'elemento con chiave minima.

Tipo di dato `CodaPriorità` (2/2)

Operazioni aggiuntive

Suppongo che mi venga dato un riferimento diretto all'elemento da modificare

`increaseKey`$(elem\ e, chiave\ \Delta)$
 incrementa della quantità Δ la chiave dell'elemento e in S.

`decreaseKey`$(elem\ e, chiave\ \Delta)$
 decrementa della quantità Δ la chiave dell'elemento e in S.

`merge`$($`CodaPriorita` c_1, `CodaPriorita` $c_2) \rightarrow$ `CodaPriorita`
 restituisce una nuova coda con priorità $c_3 = c_1 \cup c_2$.

Applicazioni: gestione code in risorse condivise, gestione priorità in processi concorrenti, etc. Si noti che la coda di priorità non supporta l'operazione di ricerca di un elemento

Obiettivo

Fornire un'implementazione di una coda di priorità di n elementi che consenta di fare tutte le operazioni descritte in tempo O(log n).

Quattro implementazioni elementari

1. Array non ordinato
2. Array ordinato
3. Lista non ordinata
4. Lista ordinata

Ci focalizzeremo soltanto sulle operazioni di base

NOTA BENE: Si noti che la coda di priorità è un tipo di dato dinamico (cioè di dimensione variabile), in quanto soggetto ad inserimenti e cancellazioni. L'uso degli array va quindi inteso pensando alla loro versione dinamica, che implica riallocazioni/deallocazioni di memoria che raddoppiano/dimezzano lo spazio utilizzato. Con tale accorgimento, i costi di riallocazione/deallocazione sono assorbiti (asintoticamente) dai costi per le insert e le delete

Array non ordinato

Tengo traccia del numero n di elementi effettivamente presenti nella coda di priorità (dimensione logica dell'array) in una variabile di appoggio, e gestisco la dimensione fisica dell'array mediante allocazione dinamica

- FindMin: $\Theta(n)$ (devo guardare tutti gli elementi)
- Insert: $O(1)$ (inserisco in fondo all'array)
- Delete: $O(1)$ (poiché mi viene fornito il riferimento diretto all'elemento da cancellare, lo posso cancellare in $O(1)$ sovracopiando l'ultimo elemento)
- DeleteMin: $\Theta(n)$ (devo prima cercare il minimo in $\Theta(n)$, poi lo posso cancellare in $O(1)$)

Array ordinato

Gestione dinamica come sopra; l'array viene inoltre tenuto ordinato in ordine decrescente

- FindMin: O(1) (l'elemento minimo è in fondo all'array)
- Insert: O(n) (trovo in O(n) mediante scorrimento da destra verso sinistra la giusta posizione, e poi faccio O(n) spostamenti verso destra); nel caso migliore costa O(1), grazie all'accorgimento della scansione da destra verso sinistra, come facevamo in **`InsertionSort2`**;
- Delete: O(n) (devo fare O(n) spostamenti verso sinistra); nel caso migliore costa O(1), ovviamente
- DeleteMin: O(1) (l'elemento minimo è in fondo all'array, non devo fare spostamenti)

Lista non ordinata

La considero bidirezionale, e mantengo un puntatore alla testa ed uno alla coda

- FindMin: $\Theta(n)$ (devo guardare tutti gli elementi)
- Insert: $O(1)$ (inserisco in coda o in testa)
- Delete: $O(1)$ (poiché mi viene fornito il riferimento diretto all'elemento da cancellare, lo posso cancellare in $O(1)$ agendo sui puntatori)
- DeleteMin: $\Theta(n)$ (devo prima cercare il minimo in $\Theta(n)$, poi lo posso cancellare in $O(1)$)

Lista ordinata

Tengo la lista bidirezionale ordinata in ordine crescente

- FindMin: O(1) (il minimo è in testa alla lista)
- Insert: O(n) (trovo in O(n) la giusta posizione, e poi faccio in O(1) l'inserimento); nel caso migliore costa O(1), ovviamente
- Delete: O(1) (agisco sui puntatori)
- DeleteMin: O(1) (basta far puntare la testa della lista al secondo elemento della lista stessa, e modificare il puntatore al predecessore di quest'ultimo a *nil*)

Riepilogo implementazioni elementari

	FindMin	Insert	Delete	DeleteMin
Array non ord.	Θ(n)	O(1)	O(1)	Θ(n)
Array ordinato	O(1)	O(n)	O(n)	O(1)
Lista non ordinata	Θ(n)	O(1)	O(1)	Θ(n)
Lista ordinata	O(1)	O(n)	O(1)	O(1)

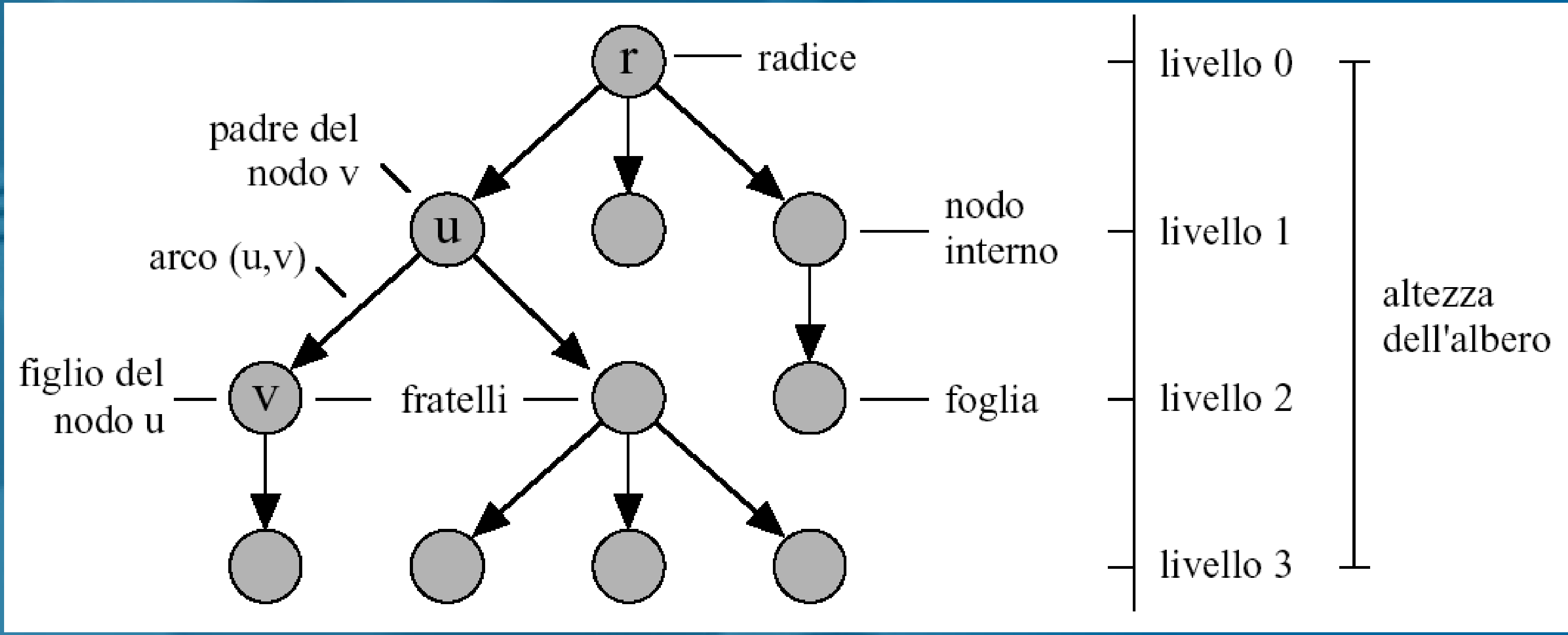
☹ Ogni implementazione elementare ha almeno un’operazione che comporta un costo lineare! Voglio fare meglio…

Tre implementazioni evolute

- d-heap (per $d \geq 2$): generalizzazione degli heap binari visti per l'ordinamento
- Heap binomiali
- Heap di Fibonacci (cenni)

d-heap

Alberi: qualche richiamo



albero d-ario: albero in cui tutti i nodi interni hanno (al più) d figli

d=2 → albero binario

Un albero d-ario è completo se tutti i nodi interni hanno esattamente d figli e le foglie sono tutte allo stesso livello

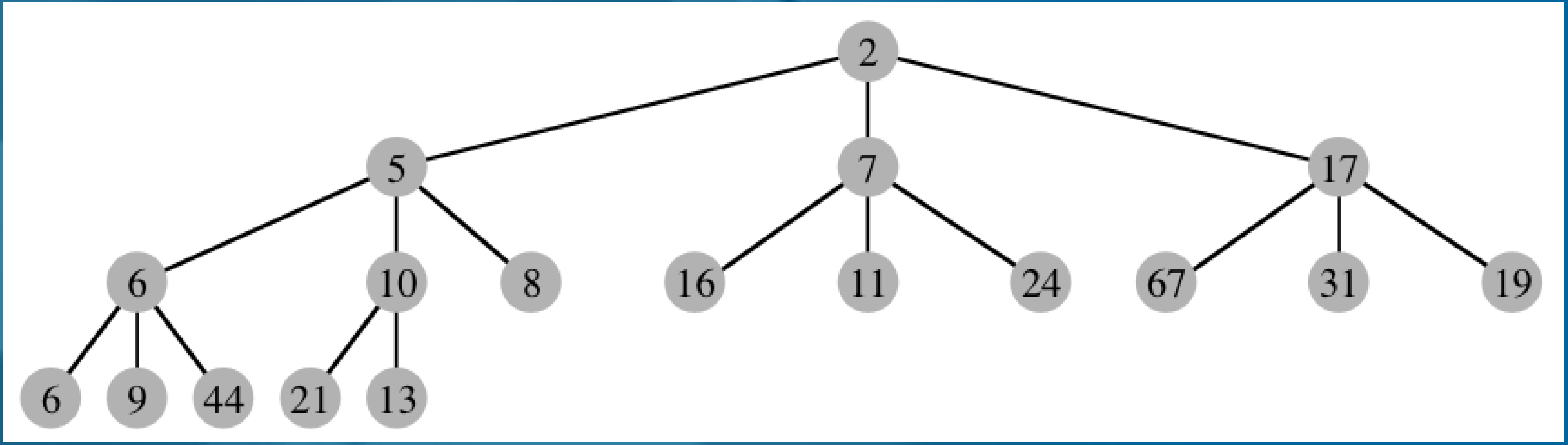
Definizione

Un d-heap è un albero radicato d-ario con le seguenti proprietà:

1. Struttura: è quasi completo, ovvero è completo fino al penultimo livello, e tutte le foglie sull'ultimo livello sono compattate verso sinistra (quindi tutti i nodi interni fino al terzultimo livello hanno esattamente d figli, mentre sul penultimo livello ci sono in generale alcuni nodi interni con esattamente d figli, un nodo interno con meno di d figli, e infine delle foglie)
2. Contenuto informativo: ogni nodo v contiene un elemento elem(v) ed una chiave chiave(v) presa da un dominio totalmente ordinato
3. Ordinamento parziale di tipo min-heap: chiave(parent(v)) ≤ chiave(v) per ogni nodo v diverso dalla radice (si noti che è inverso rispetto a quello max-heap usato per l'heapsort non decrescente)

Esempio

Heap d-ario con 18 nodi e d=3



Proprietà

1. Un d-heap con n nodi ha altezza $\Theta(\log_d n)$
2. La radice contiene l'elemento con chiave minima (per via della proprietà di ordinamento a min-heap)
3. Può essere rappresentato implicitamente tramite vettore posizionale grazie alla proprietà di struttura.

Approfondimento: Dimostrare che, supponendo che il primo elemento dell'array sia in posizione 1, valgono le seguenti relazioni posizionali per l'elemento in posizione $i \geq 1$:

$$\text{padre}(i)=\lceil (i-1)/d \rceil \qquad \text{figlio}_j(i)=(i-1)\cdot d+j+1, \text{ per } 1\leq j\leq d$$

Altezza logaritmica (in based d) di un heap d-ario

- Abbiamo già dimostrato che un albero binario quasi completo di n nodi, ha altezza $h := h(n) = \Theta(\log n)$. Dimostriamo ora che un albero d-ario quasi completo di n nodi ha altezza $h := h(n) = \Theta(\log_d n)$.
- Ma se l'albero d-ario fosse completo di altezza h:

$$n = 1 + d + d^2 + \ldots + d^{h-1} + d^h =$$

(somma parziale h-esima della serie geometrica di ragione d)

$$= (d^{h+1}-1)/(d-1) \leq d^{h+1}$$

e quindi se fosse completo di altezza h-1 avremmo $n \leq d^h$

⇒ Quindi, se l'albero d-ario è quasi completo e ha altezza h:

$$d^h < n \leq d^{h+1} \Rightarrow h = \lfloor \log_d n \rfloor \quad \Rightarrow h = \Theta(\log_d n)$$

Procedure ausiliarie

Nel prosieguo supporremo che l'heap d-ario venga mantenuto mediante un albero d-ario di nome T. Le seguenti procedure sono utili per ripristinare la proprietà di ordinamento parziale dell'heap allorquando la chiave di un nodo v si trovi a non soddisfarla

$T(n)=O(\log_d n)$

procedura `muoviAlto`(v)
  while ($v \neq radice(T)$ **and** $chiave(v) < chiave(padre(v))$) **do**
    scambia di posto v e $padre(v)$ in T

$T(n)=O(d \log_d n)$

procedura `muoviBasso`(v)
  repeat
    sia u il figlio di v con la minima $chiave(u)$, se esiste
    if (v non ha figli o $chiave(v) \leq chiave(u)$) **break**
    scambia di posto v e u in T

findMin()

$\texttt{findMin}() \rightarrow elem$

restituisce l'elemento nella radice di T.

$T(n)=O(1)$

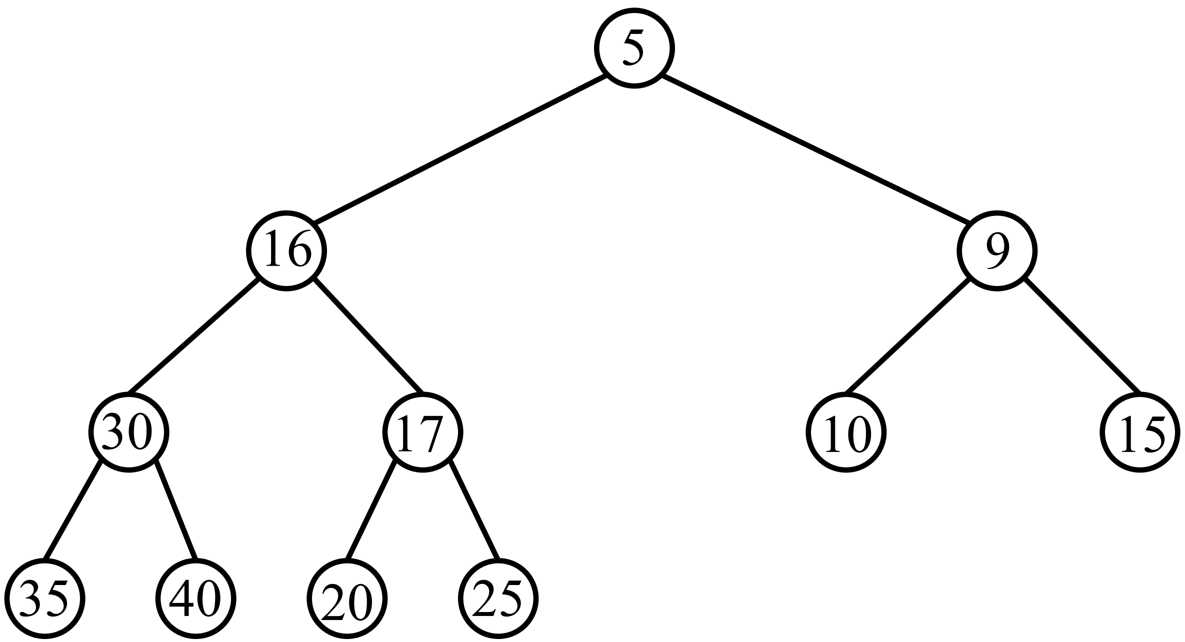
insert(elem e, chiave k)

Crea un nuovo nodo *v* con elemento *e* e chiave *k*, e posizionalo come foglia nella prima posizione disponibile sull'ultimo livello di *T*. La proprietà dell'ordinamento a min-heap viene poi ripristinata spingendo il nodo *v* verso l'alto tramite ripetuti scambi di nodi (procedura muoviAlto).

$T(n)=O(\log_d n)$ per l'esecuzione di muoviAlto

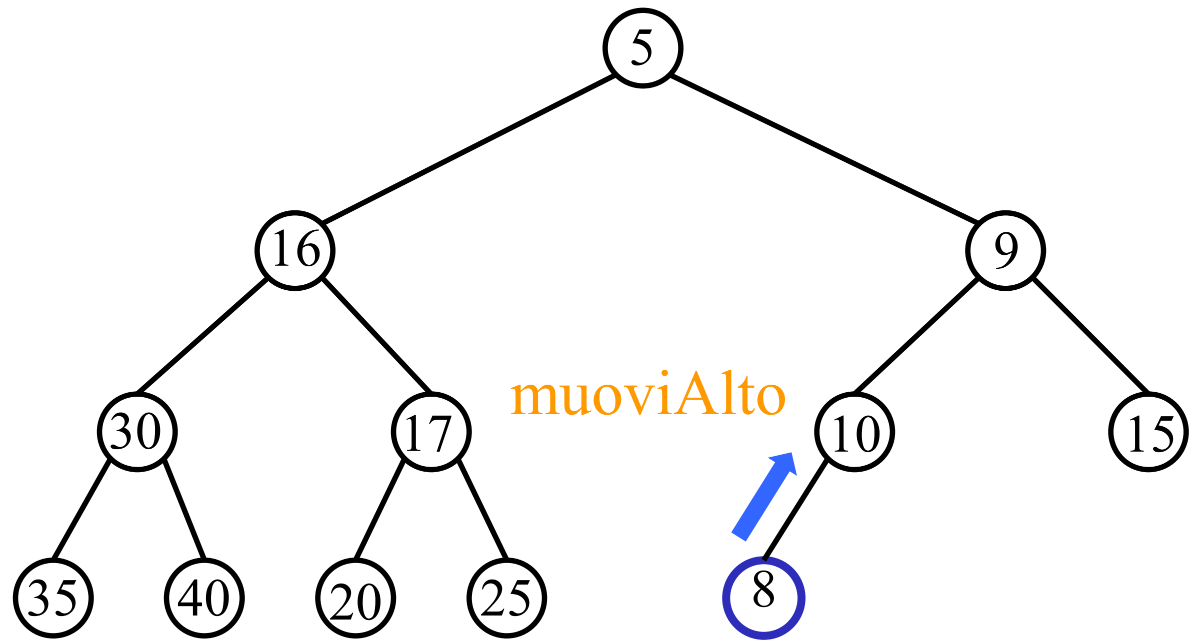
Domanda: Come faccio a trovare la giusta posizione della foglia che devo creare?
Risposta: Mantengo un puntatore al padre della prima foglia disponibile. Ma come faccio a tenere aggiornato questo puntatore a valle di inserimenti e cancellazioni? Pensateci…ovviamente devo spendere $O(\log_d n)$, per non eccedere nei costi

insert(elem e, chiave k)



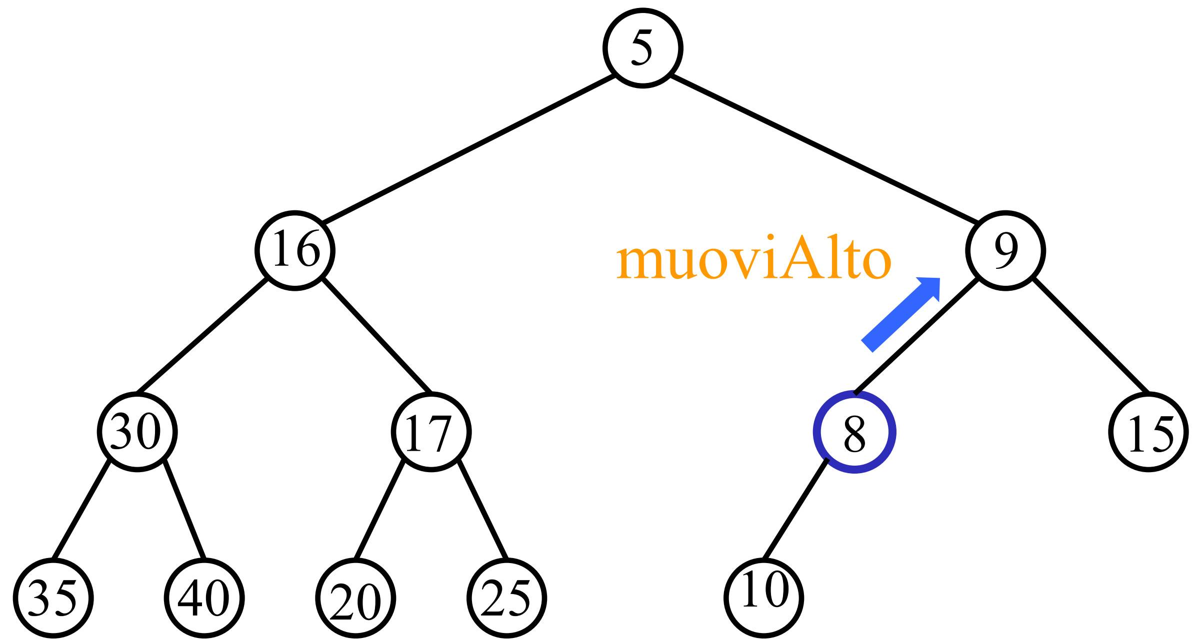
Insert(e,8)

insert(elem e, chiave k)



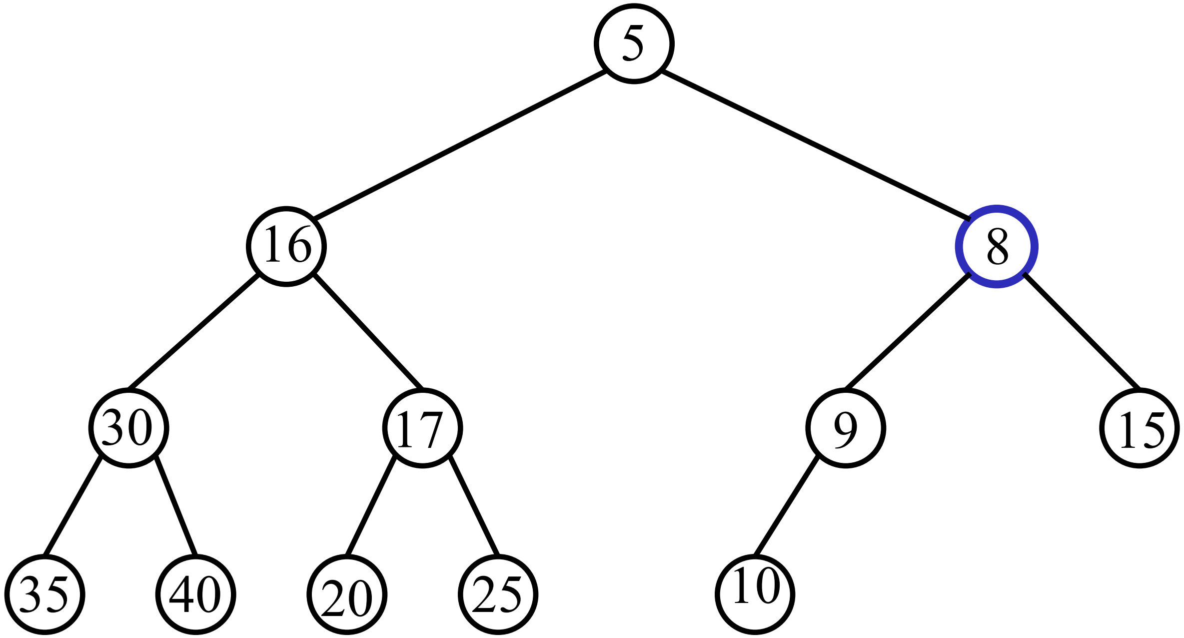
Insert(e,8)

insert(elem e, chiave k)



Insert(e,8)

insert(elem e, chiave k)



Insert(e,8)

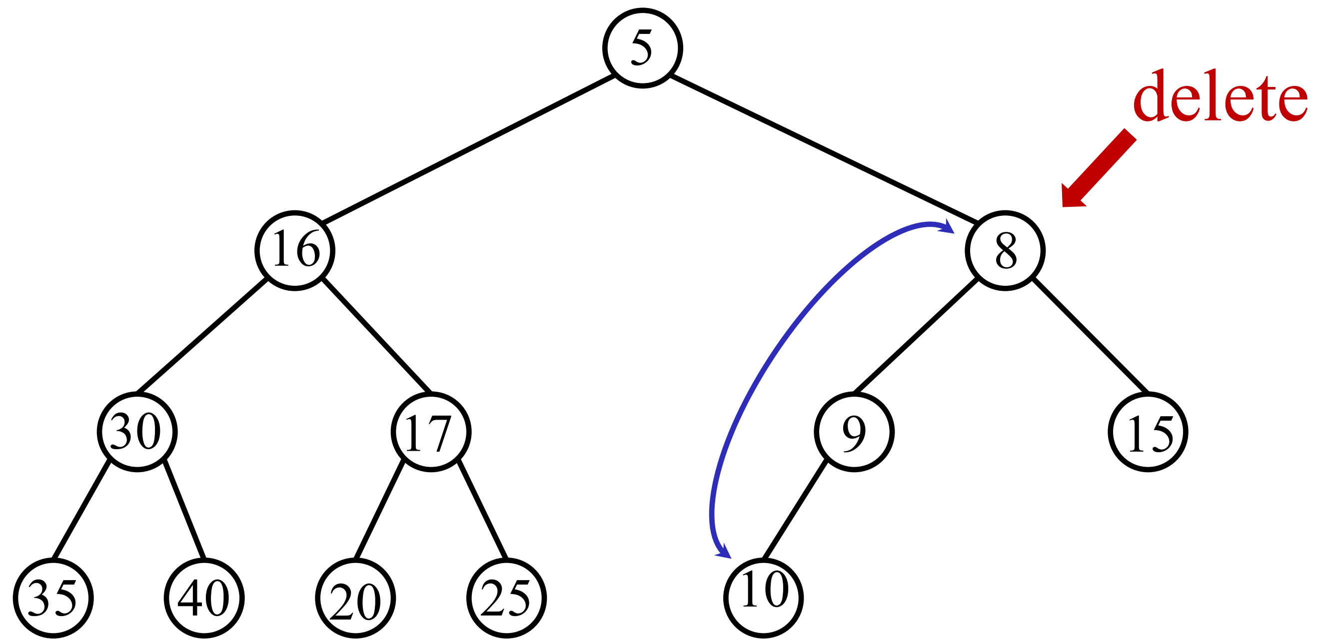
delete(elem e)

scambia il nodo v contenente l'elemento e con la foglia u più a destra sull'ultimo livello di T, e poi elimina v. Ripristina infine la proprietà dell'ordinamento a heap spingendo il nodo u verso la sua posizione corretta scambiandolo ripetutamente con il proprio padre o con il proprio figlio contenente la chiave più piccola

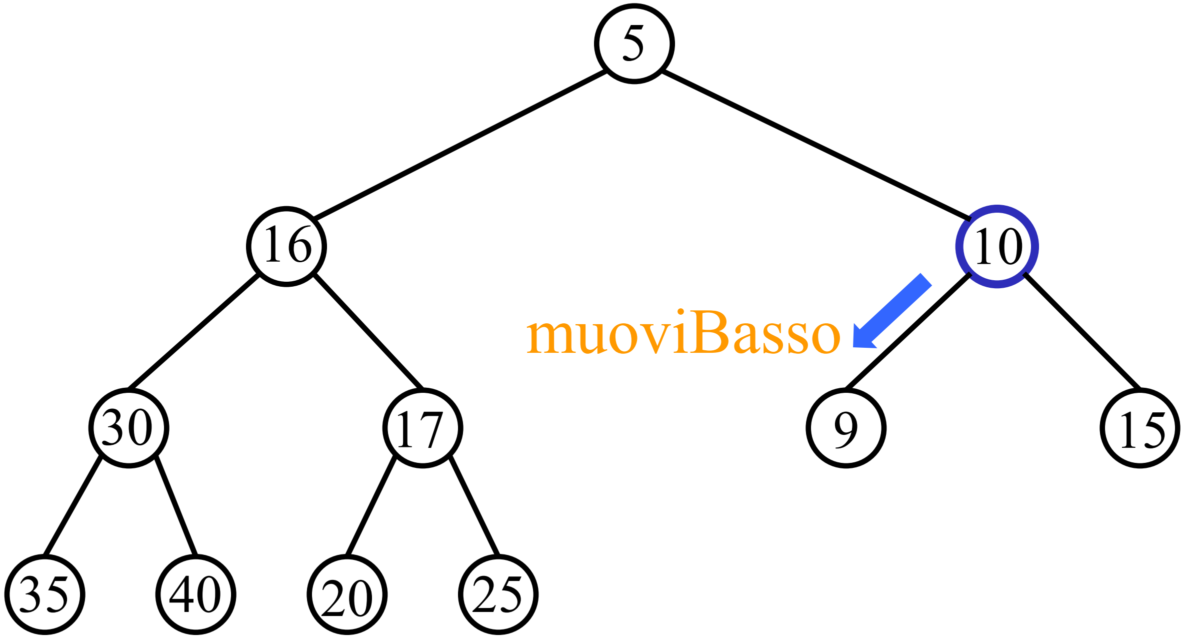
T(n) dipenderà da quale situazione si verificherà: se l'elemento spostato è più piccolo del padre, richiamo muoviAlto e spendo $O(\log_d n)$, se invece l'elemento spostato è più piccolo di qualcuno dei suoi figli, richiamo muoviBasso e spendo $O(d \log_d n)$. Quindi, la delete può essere eseguita in $O(d \log_d n)$.

Domanda: Chi mi dà il puntatore alla foglia u più a destra sull'ultimo livello? Si ripropone lo stesso problema che avevo per la insert…

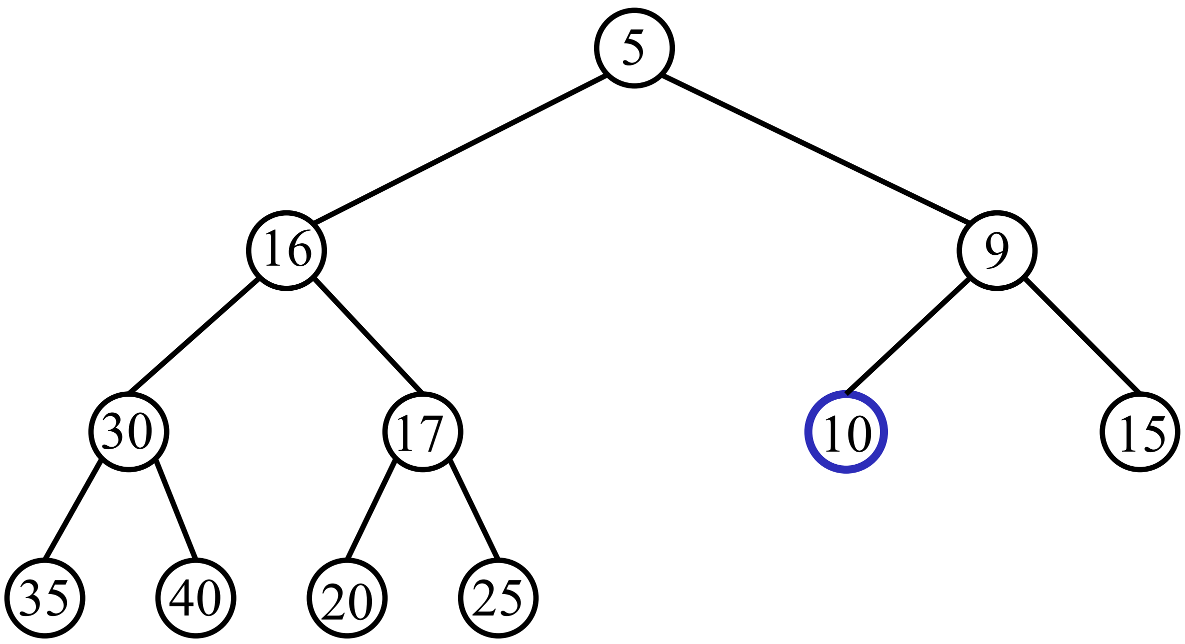
delete(elem e)



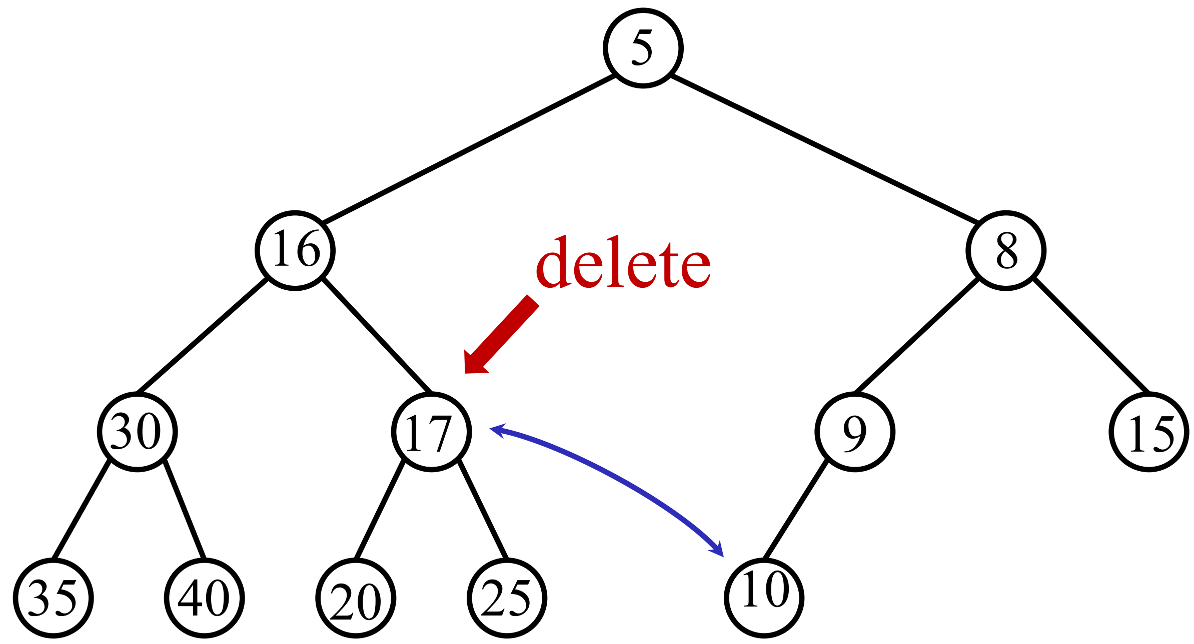
delete(elem e)



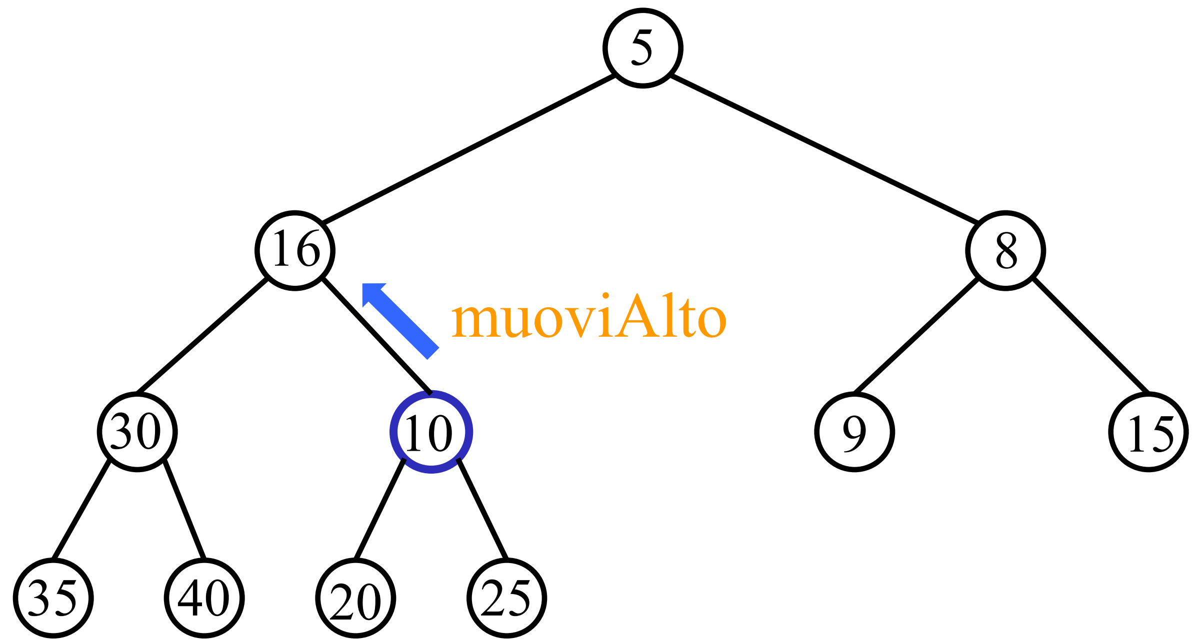
delete(elem e)



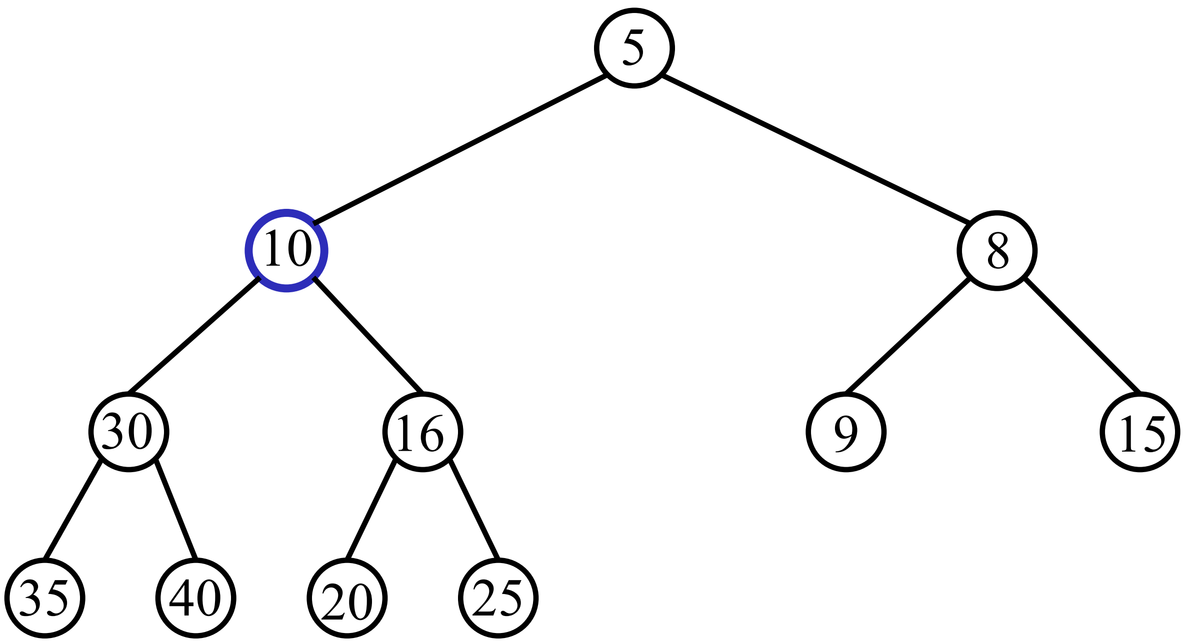
delete(elem e)



delete(elem e)



delete(elem e)



deleteMin()

scambia la radice v contenente la chiave minima con la foglia u più a destra sull'ultimo livello di T, e poi elimina v. Ripristina infine la proprietà dell'ordinamento a heap spingendo il nodo u verso la sua posizione corretta scambiandolo ripetutamente con il proprio figlio contenente la chiave più piccola

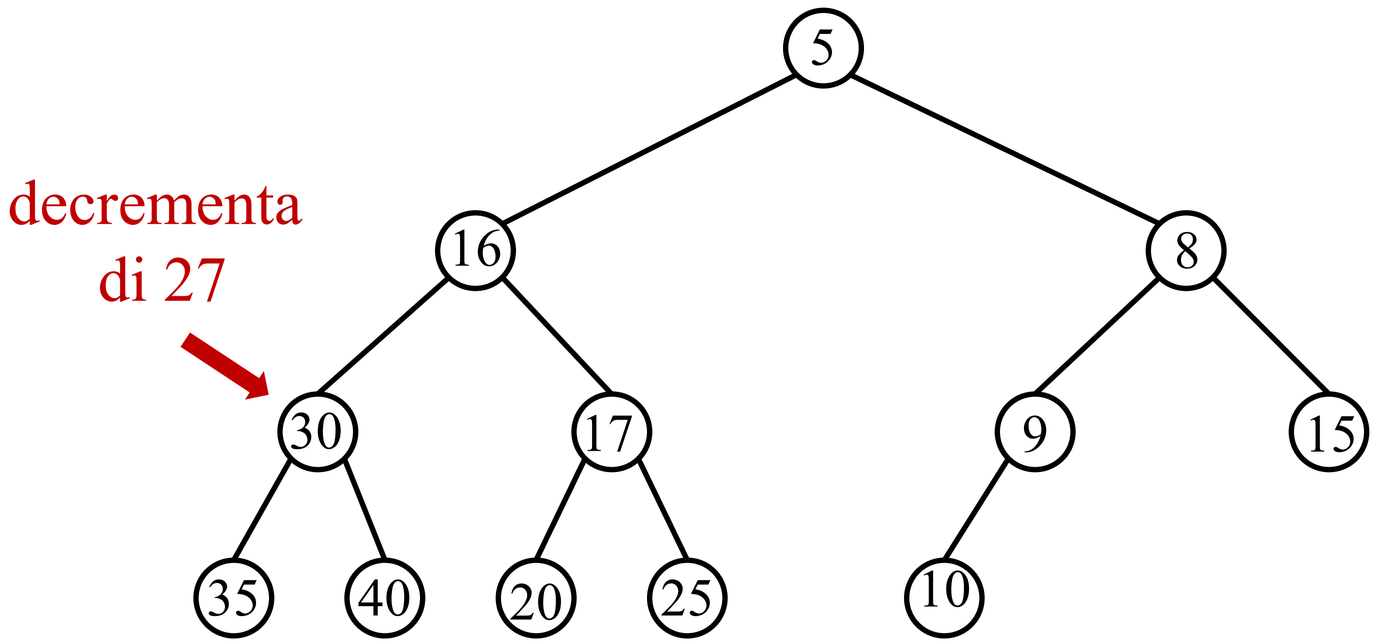
$T(n)= O(d \log_d n)$ per l'esecuzione di muoviBasso

decreaseKey(elem e, chiave Δ)

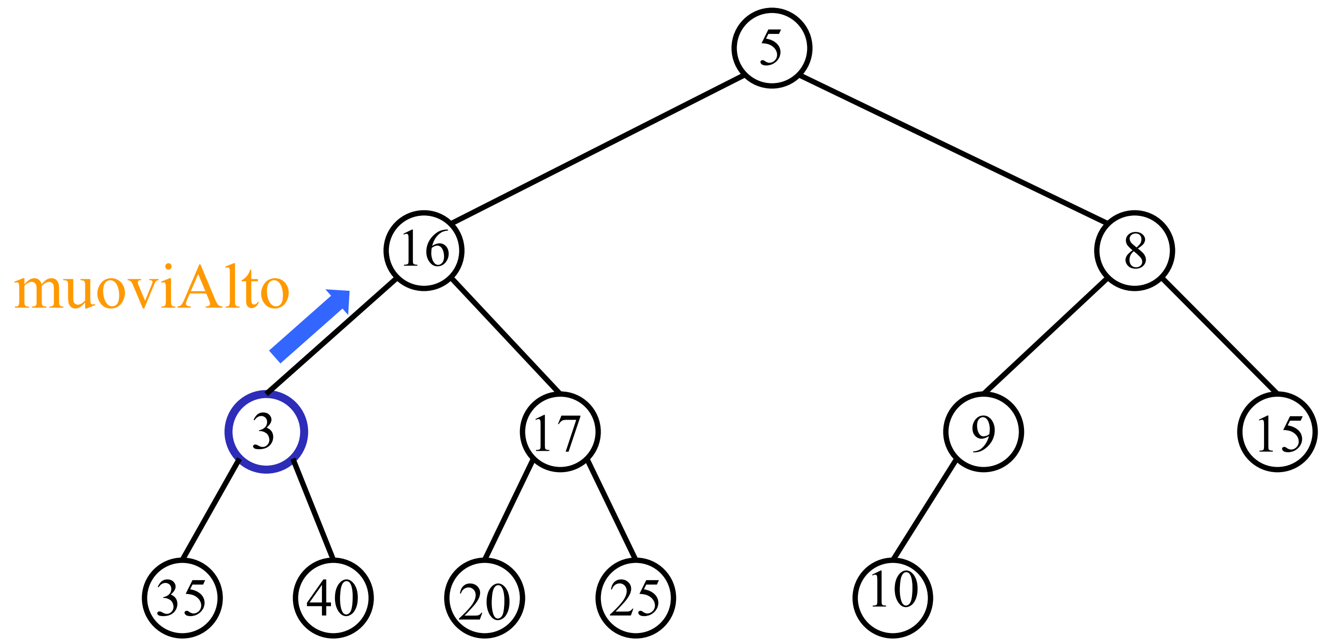
decrementa il valore della chiave nel nodo v contenente l'elemento e della quantità richiesta Δ. Ripristina poi la proprietà dell'ordinamento a heap spingendo il nodo v verso l'alto tramite ripetuti scambi di nodi.

$T(n)=O(\log_d n)$ per l'esecuzione di muoviAlto

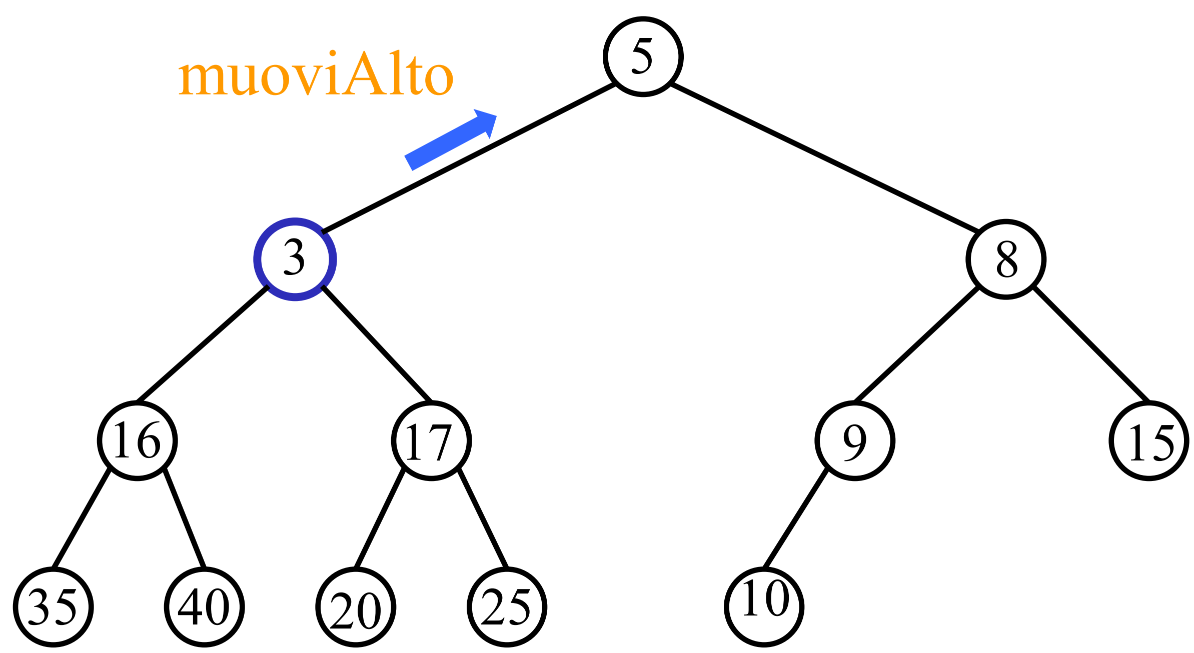
decreaseKey(elem e, chiave d)



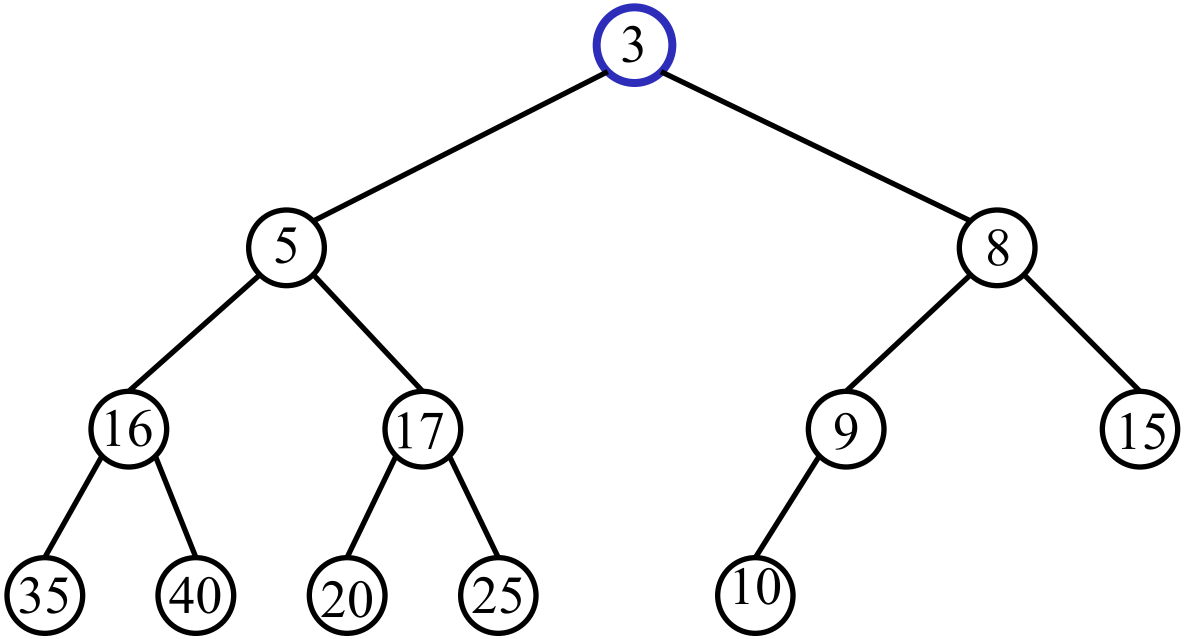
decreaseKey(elem e, chiave d)



decreaseKey(elem e, chiave d)



decreaseKey(elem e, chiave d)

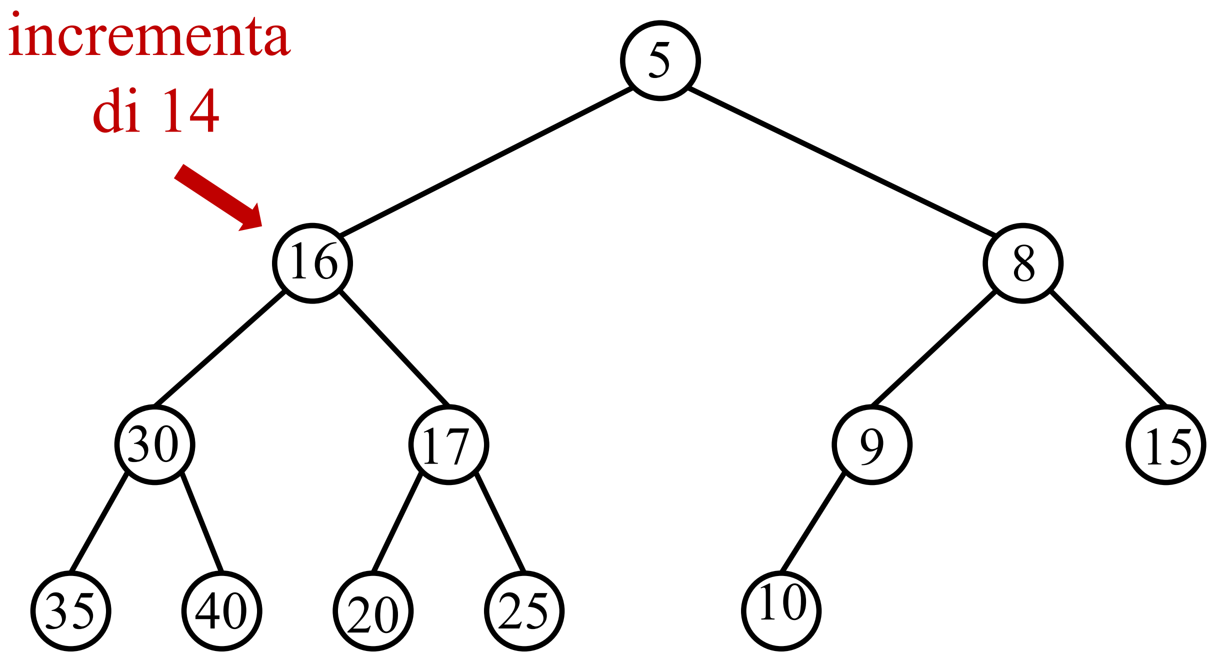


increaseKey(elem e, chiave Δ)

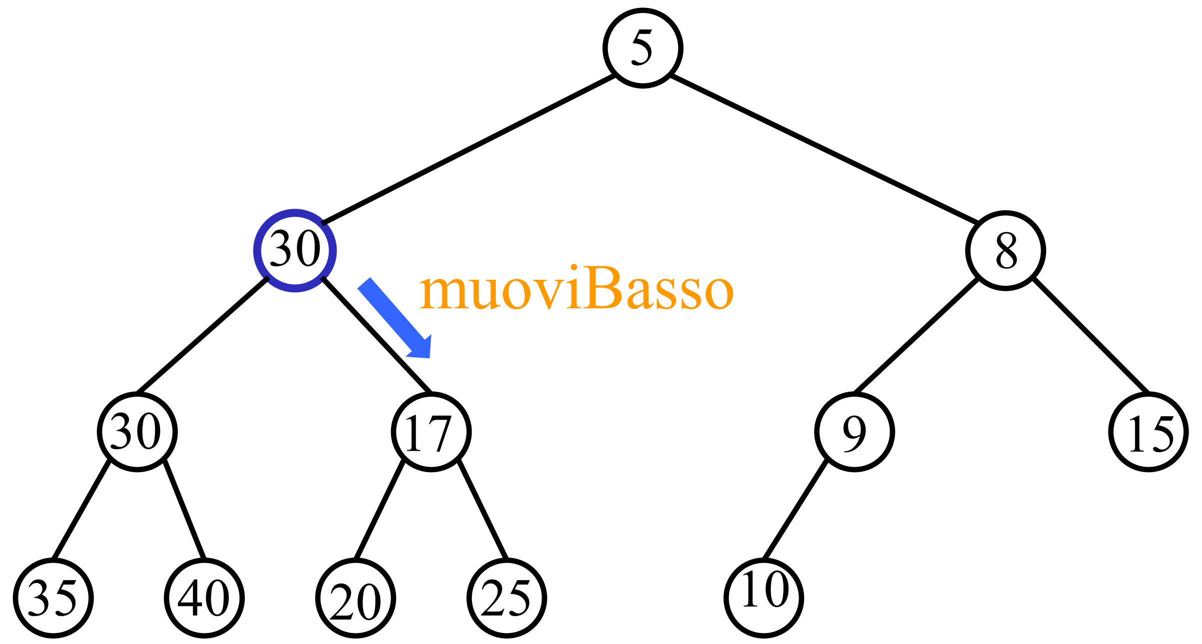
aumenta il valore della chiave nel nodo contenente l'elemento e della quantità richiesta Δ. Ripristina poi la proprietà dell'ordinamento a heap spingendo il nodo v verso il basso tramite ripetuti scambi di nodi.

$T(n)=O(d \log_d n)$ per l'esecuzione di muoviBasso

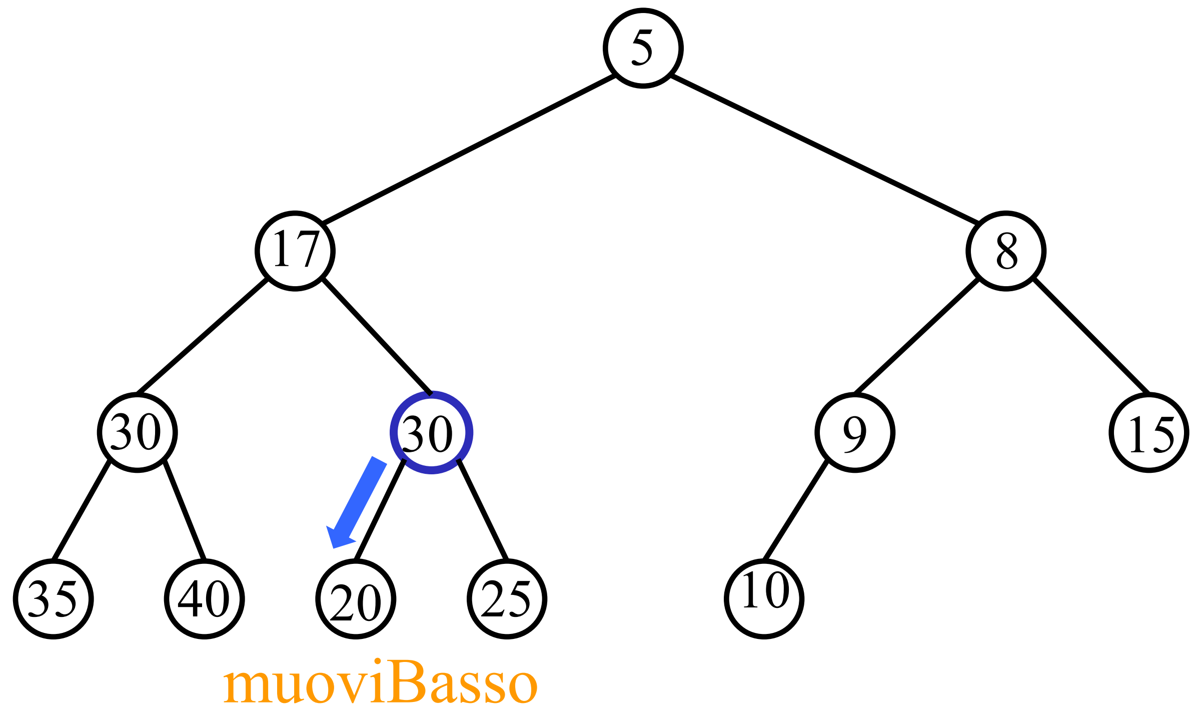
increaseKey(elem e, chiave d)



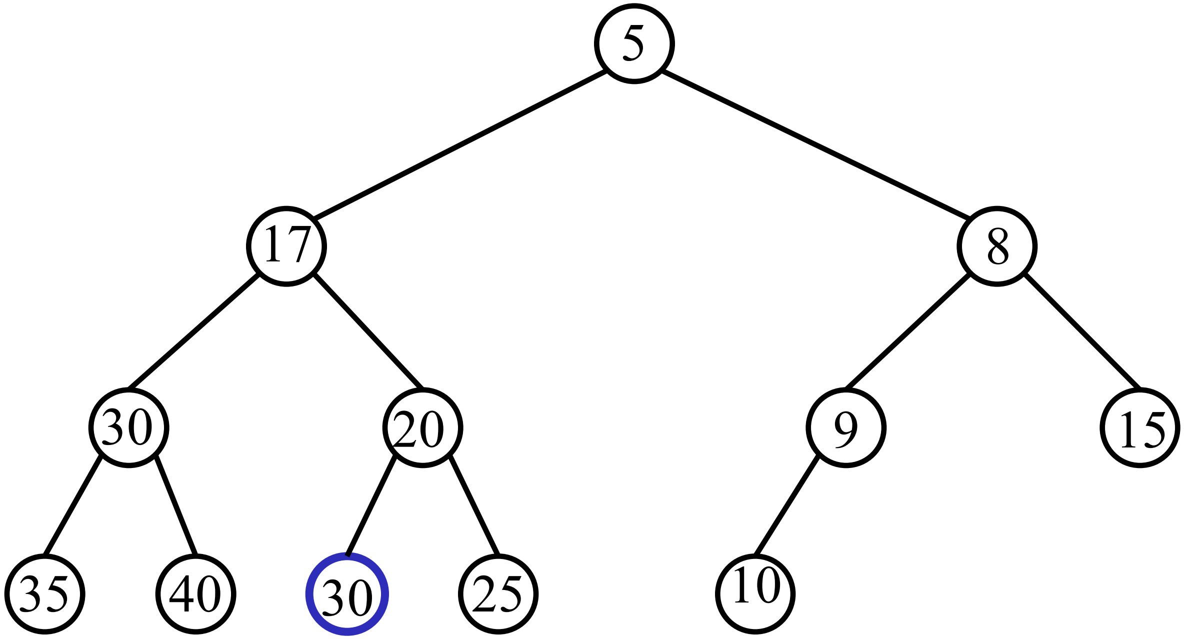
increaseKey(elem e, chiave d)



increaseKey(elem e, chiave d)



increaseKey(elem e, chiave d)



merge(heap d-ario c_1, heap d-ario c_2)

Analogamente a quanto mostrato per l'heap binario, la creazione di un heap d-ario (con d costante) di n elementi può essere eseguita in $\Theta(n)$. Infatti, il tempo di esecuzione di heapify diventa ora:

$$T(n) = d\,T(n/d) + O(d \log_d n)$$

ove il fattore $O(d \log_d n)$ è relativo all'esecuzione della procedura muoviBasso (`fixheap` nell'heap binario).

Siamo quindi di nuovo nel Caso 1 del Teorema Master:

$d \log_d n \equiv f(n) = O(n^{\log_d d - \varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$, e quindi $T(n) = \Theta(n^{\log_d d}) = \Theta(n)$

$\Rightarrow$ Il merge può quindi essere eseguito in $\Theta(n)$, ove $n = |c_1| + |c_2|$, generando un nuovo heap d-ario che contiene tutti gli elementi in c_1 e c_2

Riepilogo

	Find Min	Insert	Delete	DelMin	Incr. Key	Decr. Key	merge
Array non ord.	$\Theta(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$\Theta(n)$	???	???	???
Array ordinato	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	???	???	???
Lista non ordinata	$\Theta(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$\Theta(n)$	???	???	???
Lista ordinata	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	???	???	???
d-Heap	$O(1)$	$O(\log_d n)$	$O(d \log_d n)$	$O(d \log_d n)$	$O(d \log_d n)$	$O(\log_d n)$	$\Theta(n)$

⇒ Il d-heap purtoppo ancora non soddisfa il nostro obiettivo di implementare una coda di priorità con costi logaritmici!

Esercizi di approfondimento

1. Fornire un'implementazione dell'operazione di **merge**, in cui gli elementi di uno dei due heap vengono aggiunti sequenzialmente (tramite insert successive) all'altro heap. Analizzarne quindi la convenienza asintotica rispetto all'implementazione appena fornita.
2. Valutare i costi delle operazioni aggiuntive (IncreaseKey, DecreaseKey e Merge) sulle implementazioni elementari (vettori e liste).