Elementi di Matematica - Esercizi - 15/10/2003

(1) Elencare gli elementi degli insiemi:

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ (x^2-1)^2 = 0\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x-1)^3 - 2(x-1)^2 + (x-1) = 0\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 3 \le x \le 3\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x^2-4)/(x^2-1) = 0\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ (x^2+6x)^2 = 17^2\}, \quad \{x \in \mathbb{Z} \ : \ 7 < x^2 < 30\}, \quad \{(-1)^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

(2) Dire se le seguenti scritture definiscono funzioni:

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = 1/x;$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5 \text{ se } x \le 0, \quad f(x) = x^3 \text{ se } x > 0;$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5 \text{ se } x \le 0, \quad f(x) = x^3 + 1 \text{ se } x \ge 0;$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1/x;$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \text{ se } (x^2-1)^2 \le 0, \quad f(x) = x \text{ se } x \ne 1, \ x \ne -1;$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -1 \text{ se } x \le 0, \quad f(x) = 1 \text{ se } x > 0, \quad f(x) = 2 \text{ se } x^2 = 0.$

(3) Dimostrare per induzione che:

$(a)\ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right], \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \ge 1;$
$(b)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{3k}{2k+1} \le 2n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \ge 1;$
$(c)\ 2^{n-1} > 6n + 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \ge 7.$

(4) Dimostrare per induzione che, se un insieme A è composto da n elementi, allora l'insieme della parti di A, $\mathcal{P}(A)$, è composto da 2^n elementi.

(5) Dire se le seguenti funzioni sono biiettive e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^3 + 2;$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \text{ se } x \le 0, \quad f(x) = 2x \text{ se } x > 0;$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \text{ se } x \ge 1, \quad f(x) = x \text{ se } x < 1;$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 - 2;$
$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1/(x^3+1).$

(6) Determinare la funzione $g \circ f$ nei seguenti casi:

$(a) \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(x) = x^2 + 8, \qquad g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x+1},$

$$(b) \qquad f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \le 1 \\ \log_2 x & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = 2^{-x}$$

(7)(a) Dati gli insiemi A, B, C, D, con $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, dimostrare che

$$A \times C \subseteq B \times D.$$

(b) Siano dati gli insiemi $A,\ B,\ X$, con $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. Dimostrare che

$$A \subseteq B \qquad \text{se e solo se} \qquad B^c \subseteq A^c$$

dove $A^c = X \setminus A$, $B^c = X \setminus B$ sono i complementari di A, B rispetto all'insieme X.