

Laurea Triennale in Informatica – a.a. 2004/05

Analisi Matematica I

8 luglio 2005

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale

$$\sum_{k=1}^{2n} (k-1) = n(2n-1).$$

Esercizio 2. Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventuali massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ 3(-1)^n + \log \left(\frac{1}{n} \right); \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \right\}.$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x) \sin(x^2 \log x)}{\sin x \log(1 + x \log x)} \qquad (b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^{\log n}.$$

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ a \sin x + b & \text{se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

- (a) determinare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile in $x = \pi$;
(b) per tali valori dei parametri, determinare massimo e minimo assoluti di f sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\log |x|},$$

- (a) determinare il dominio di f , i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
(b) stabilire in quali punti del dominio f è derivabile e calcolare la derivata di f ;
(c) discutere gli eventuali punti di non derivabilità;
(d) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo;
(e) tracciare il grafico qualitativo di f .