

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che per ogni numero naturale $n \geq 2$ vale

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Esercizio 2. Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventuali massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ x = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right); n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Esercizio 3. Tramite la definizione di limite, verificare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$.

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\sqrt{x} + \sin x}.$$

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\log^2 |x| - 1},$$

- (a) determinare il dominio di f , i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
- (b) stabilire in quali punti del dominio f è derivabile, calcolare la derivata di f ; discutere gli eventuali punti di non derivabilità;
- (c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo;
- (d) tracciare il grafico qualitativo di f .

Esercizio 6. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1)^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{|x-1|} & \text{se } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

- (a) determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione è continua nel punto $x = 0$;
- (b) per tali valori del parametro, determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto di f sull'intervallo $[-1, 3]$.