

Laurea Triennale in Fisica - Analisi B

6 luglio 2006

Esercizio 1. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$$

Esercizio 2. Data la funzione

$$F(x) = \int_2^{|x|} \frac{\operatorname{arctg}(e^{-t})}{t+1} dt,$$

determinare il suo insieme di definizione; individuare eventuali simmetrie, determinare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione, individuare eventuali asintoti; calcolare la derivata, individuare eventuali punti di non derivabilità; studiare il segno della derivata e dedurne informazioni sulla crescita e decrescita della funzione; determinare i suoi eventuali massimi e minimi. Disegnare il grafico di F .

Esercizio 3. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{t+2}{t(\sqrt{t}-1)^2} dt.$$

Esercizio 4. Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$\begin{cases} x' = -\alpha y + \cos t \\ y' = x \end{cases}$$

per i seguenti valori del parametro: $\alpha = 1$, $\alpha = -1$.

Esercizio 5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty - y^2 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

- Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha esistenza e unicità di una soluzione locale.
- Determinare le zone di crescita e decrescita della soluzione.
- Stabilire se la soluzione ammette qualche simmetria.
- Determinare gli eventuali asintoti della soluzione.
- Stabilire per quali valori di α la soluzione è globalmente definita.
- Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.