

**Laurea Triennale in Fisica**

**Analisi B**

**30 marzo 2006**

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt{n} \log \left( 1 + \frac{1}{1 + n^2 x^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione.
- (b) Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie  $\sum f_n(x)$ .
- (c) Stabilire se  $\sum f_n(x)$  converge uniformemente sull'insieme di convergenza puntuale.
- (d) Stabilire se la serie converge totalmente su qualche sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** Data la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3 \sqrt{|t-2|}} dt,$$

determinare il suo insieme di definizione; calcolare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione, individuare eventuali asintoti; calcolare la derivata, individuare eventuali punti di non derivabilità; studiare il segno della derivata e dedurne informazioni sulla crescita e decrescita della funzione; determinare i suoi eventuali massimi e minimi. Disegnare il grafico di  $F$ .

**Esercizio 3.** Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y' + \frac{2}{t}y = \sin t.$$

**Esercizio 4.** Data l'equazione

$$y''' + y' = (3t + 5)e^{-\alpha t},$$

dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  tutte le soluzioni sono limitate per  $t \rightarrow +\infty$ .

**Esercizio 5.** Dato il sistema autonomo

$$\begin{cases} x' = 3x + 15xy \\ y' = 5y - 15xy, \end{cases}$$

- (a) determinare i punti critici del sistema e stabilirne la natura;
- (b) rappresentare approssimativamente le orbite del sistema sul piano delle fasi (si richiede un commento esauriente su quanto riportato sul piano delle fasi).