Dimostrazione del teorema di esistenza e unicità

Teorema 1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un insieme aperto e sia $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$. Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \,. \end{cases} \tag{1}$$

Se

i) $\mathbf{f}$ *è continua in* Ω

ii) $\mathbf{f}$ *è localmente lipschitziana in* Ω*, rispetto a* $\mathbf{y}$ *e uniformemente rispetto a* t

allora, per ogni punto $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega$, esiste un intervallo $I_\delta = [\tau - \delta, \tau + \delta]$, $\delta > 0$, in cui è definita una soluzione $\boldsymbol{\varphi}(t)$ del problema di Cauchy (1). Tale soluzione è unica, nel senso che ogni altra soluzione del problema di Cauchy (1) coincide con $\boldsymbol{\varphi}$ nell'intervallo comune di definizione.

Dimostrazione. Dimostriamo l'esistenza della soluzione.

1. Sappiamo che, nelle ipotesi del teorema, $\boldsymbol{\varphi}$ è soluzione del problema di Cauchy (1) sull'intervallo I_δ se e solo se $\boldsymbol{\varphi}$ è continua nell'intervallo I_δ e soddisfa l'equazione integrale

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\xi} + \int_\tau^t \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s))\, ds, \qquad \forall\, t \in I_\delta \,. \tag{2}$$

Dimostreremo che, scegliendo $\delta > 0$ in modo opportuno, l'equazione (2) ammette una soluzione continua.

2. Definiamo la successione di funzioni

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \boldsymbol{\xi}\,, \qquad \boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) = \boldsymbol{\xi} + \int_\tau^t \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_n(s))\, ds, \qquad n \geq 0 \,. \tag{3}$$

Per essere ben definita, la successione deve soddisfare $(t, \boldsymbol{\varphi}_n(t)) \in \Omega$ per ogni $n \geq 0$, $t \in I_\delta$. Siano $a, b > 0$ tali che l'insieme

$$\Gamma = \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{N+1} : \qquad |t - \tau| \leq a, \qquad \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}\| \leq b\}$$

sia contenuto in Ω. È possibile determinare a, b con queste proprietà in quanto Ω è un aperto e $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega$.
L'insieme Γ è chiuso e limitato. Poichè $\mathbf{f}$ è continua, possiamo definire

$$M \doteq \max_{(t,\mathbf{y}) \in \Gamma} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \,. \tag{4}$$

Inoltre, per l'ipotesi di lipschitzianità locale, *ii)*, esiste una costante L tale che

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \qquad \forall\, (t, \mathbf{y}),\ (t, \mathbf{z}) \in \Gamma \,. \tag{5}$$

3. Verifico che, per δ opportuno, i grafici delle $\boldsymbol{\varphi}_n$ sono contenuti nell'insieme Γ. Abbiamo

$$(t, \boldsymbol{\varphi}_n(t)) \in \Gamma \iff |t - \tau| \leq a, \qquad \|\boldsymbol{\varphi}_n(t) - \boldsymbol{\xi}\| \leq b \,.$$

Scegliamo $\delta > 0$ in modo tale che $\delta \leq a$. Inoltre, per motivi che si chiariranno tra poco, scegliamo $\delta \leq b/M$, dove M è la costante definita in (4). Dunque chiediamo che sia

$$\delta \leq \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} . \tag{6}$$

Verifichiamo per induzione che vale, per ogni $n \geq 0$

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(t) - \boldsymbol{\xi}\| \leq b \qquad \forall\, t : \, |t - \tau| \leq \delta \, .$$

Per $n = 0$, $\|\boldsymbol{\varphi}_0(t) - \boldsymbol{\xi}\| = 0 \leq b$. Per $n > 0$ avremo che (supponiamo $t > \tau$ per semplicità)

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}_n(t) - \boldsymbol{\xi}\| &= \left\| \int_\tau^t \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(s))\, ds \right\| \\ &\leq \int_\tau^t \|\mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(s))\|\, ds \\ &\leq M(t - \tau) \leq M\delta \leq b \end{aligned}$$

Abbiamo così verificato che, se δ soddisfa (6), vale

$$(t, \boldsymbol{\varphi}_n(t)) \in \Gamma \qquad \forall\, t \in I_\delta, \quad \forall\, n \, .$$

4. Verifico per induzione che $\boldsymbol{\varphi}_n$ è continua su I_δ.

Per $n = 0$, $\boldsymbol{\varphi}_0$ è costante: $\boldsymbol{\varphi}_0(t) \equiv \boldsymbol{\xi}$, dunque è continua. Se $\boldsymbol{\varphi}_n$ è continua su I_δ, per un certo $n \geq 0$, anche $\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_n(t))$, in quanto composizione di funzioni continue. Ora, dal teorema fondamentale del calcolo, la funzione integrale $\int_\tau^t \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_n(s))\, ds$ è derivabile, e quindi è continua. Essendo per definizione $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) = \boldsymbol{\xi} + \int_\tau^t \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_n(s))\, ds$, possiamo concludere che anche $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}$ è continua.

5. Stima sulle iterate Supponendo $t \geq \tau$, abbiamo

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) - \boldsymbol{\varphi}_n(t)\| &= \left\| \int_\tau^t \big[\mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_n(s)) - \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(s))\big]\, ds \right\| \\ &\leq \int_\tau^t \big\|\mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_n(s)) - \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(s))\big\|\, ds \\ &\leq L \int_\tau^t \big\|\boldsymbol{\varphi}_n(s) - \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(s)\big\|\, ds \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Poniamo $I = I_\delta$ e sia $C(I)$ l'insieme delle funzioni continue su I:

$$C(I) = \{g : I \to \mathbb{R}^N, \text{ g continua su } I\} \, .$$

Date due funzioni g_1, $g_2 \in C(I)$, definiamo

$$\|g_1 - g_2\|_\infty = \max_{t \in I} \|g_1(t) - g_2(t)\| \, .$$

Il massimo esiste perchè $t \mapsto \|g_1(t) - g_2(t)\|$ è continua, e dunque possiamo applicare il teorema di Weierstrass all'intervallo chiuso e limitato I.

La quantità $\|g_1 - g_2\|_\infty$ viene detta *distanza* fra le funzioni g_1 e g_2, e soddisfa le seguenti proprietà:

- $\|g_1 - g_2\|_\infty \geq 0; \qquad \|g_1 - g_2\|_\infty = 0$ se e solo se $g_1 = g_2$

- $\|g_1 - g_2\|_\infty = \|g_2 - g_1\|_\infty$

- $\|g_1 - g_2\|_\infty \leq \|g_1 - g_3\|_\infty + \|g_3 - g_2\|_\infty$

L'ultima proprietà è detta diseguaglianza triangolare.

Riprendiamo la (7). Vale

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) - \boldsymbol{\varphi}_n(t)\| &\leq L \int_\tau^t \left\|\boldsymbol{\varphi}_n(s) - \boldsymbol{\varphi}_{n-1}(s)\right\| ds \\
&\leq L \int_\tau^t \left\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_{n-1}\right\|_\infty ds \\
&= L \left\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_{n-1}\right\|_\infty (t - \tau) \\
&\leq L\delta \left\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_{n-1}\right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Dunque abbiamo

$$\|\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) - \boldsymbol{\varphi}_n(t)\| \leq L\delta \left\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_{n-1}\right\|_\infty .$$

Facendo il massimo a primo membro, otteniamo

$$\|\boldsymbol{\varphi}_{n+1} - \boldsymbol{\varphi}_n\|_\infty \leq L\delta \left\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_{n-1}\right\|_\infty . \tag{8}$$

Scegliamo ora δ tale che

$$L\delta < 1 ,$$

che assieme alle condizioni (6) diventa

$$0 < \delta < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\} . \tag{9}$$

Iterando la stima (8), che vale per ogni $n \geq 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\varphi}_{n+1} - \boldsymbol{\varphi}_n\|_\infty &\leq (L\delta)^2 \left\|\boldsymbol{\varphi}_{n-1} - \boldsymbol{\varphi}_{n-2}\right\|_\infty \\
&\leq (L\delta)^n \|\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty .
\end{aligned}$$

Sia ora $n > m$. Avremo

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_m\|_\infty &= \|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_{n-1} + \boldsymbol{\varphi}_{n-1} - \boldsymbol{\varphi}_{n-2} \ldots + \boldsymbol{\varphi}_{m+1} - \boldsymbol{\varphi}_m\|_\infty \\
&\leq \|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_{n-1}\|_\infty + \|\boldsymbol{\varphi}_{n-1} - \boldsymbol{\varphi}_{n-2}\|_\infty + \ldots + \|\boldsymbol{\varphi}_{m+1} - \boldsymbol{\varphi}_m\|_\infty \\
&\leq \left\{(L\delta)^{n-1} + (L\delta)^{n-2} + \ldots + (L\delta)^m\right\} \|\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty \\
&\leq \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} (L\delta)^k \right\} \|\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty \\
&= \frac{(L\delta)^m}{1 - L\delta} \|\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty .
\end{aligned} \tag{10}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poichè $(L\delta)^m \to 0$ per $m \to \infty$, esisterà un $M(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\frac{(L\delta)^m}{1 - L\delta} \|\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall\, m > M(\varepsilon)\,.$$

Abbiamo così concluso che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $M(\varepsilon)$ tale che, per qualunque $m > M(\varepsilon)$, $n > m$, $t \in I_\delta$, vale

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n(t) - \boldsymbol{\varphi}_m(t)\| \le \|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_m\|_\infty < \varepsilon\,.$$

In altre parole, se δ verifica (9), la successione $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$, definita sull'intervallo I_δ, soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme.

6. Dunque la successione $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$ converge uniformemente sull'intervallo I_δ. Sia $\boldsymbol{\varphi}$ il suo limite. Poichè le $\boldsymbol{\varphi}_n$ sono continue, anche $\boldsymbol{\varphi}$ è continua su I_δ. Ci resta da verificare che $\boldsymbol{\varphi}$ soddisfa l'equazione integrale (2). Ovvero: sapendo che

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) = \boldsymbol{\xi} + \int_\tau^t \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_n(s))\, ds, \qquad t \in I_\delta\,, \tag{11}$$

e che $\boldsymbol{\varphi}_n$ converge uniformemente a $\boldsymbol{\varphi}$, vogliamo dimostrare che

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\xi} + \int_\tau^t \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s))\, ds, \qquad t \in I_\delta\,. \tag{12}$$

Dimostriamo che la successione $\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_n(t))$ converge a $\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$. Infatti, per la condizione di Lipschitz (5), vale

$$\|\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_n(t)) - \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\| \le L\|\boldsymbol{\varphi}_n(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\|\,.$$

Poichè $\boldsymbol{\varphi}_n$ converge uniformemente a $\boldsymbol{\varphi}$, applicando la definizione di convergenza uniforme, possiamo concludere che $\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_n(t))$ converge a $\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$. Dunque possiamo passare al limite sotto al segno di integrale:

$$\int_\tau^t \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_n(s))\, ds \quad \to \quad \int_\tau^t \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s))\, ds, \qquad n \to \infty.$$

In conclusione, facendo il limite per $n \to \infty$ nella (11), si ottiene l'equazione integrale (12). $\square$

Il metodo usato nella dimostrazione, ovvero la costruzione delle iterate (3), si chiama *metodo delle approssimazioni successive di Picard.*