Analisi Matematica 2 - Esercizi - 4/5/2006

(1) Stabilire il carattere delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dove

$(a)\ a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ $\quad$ $(b)\ a_n = (n^2-1)\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$(c)\ a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n}}$ $\quad$ $(d)\ a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2+n}}$

$(e)\ a_n = \left(2^{1/n}-1\right)^2$ $\quad$ $(f)\ a_n = \frac{n!}{(n+2)^{2n}}$

$(g)\ a_n = \frac{3^{-n}\log^2 n}{n}$ $\quad$ $(h)\ a_n = \frac{\sqrt[n]{n}+3n+(1/3)^n}{\sin(n!)+2^{-n}+n^5}$

$(i)\ a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ $\quad$ $(j)\ a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$

$(k)\ a_n = \frac{2+\sin n}{n}$ $\quad$ $(l)\ a_n = 5^{-\frac{n}{2}} n^3$

$(m)\ a_n = \sqrt{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$ $\quad$ $(n)\ a_n = \frac{(n^2+1)\log(n+1)}{n^3+2}$

$(o)\ a_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n^2\sin\frac{1}{n}}$ $\quad$ $(p)\ a_n = \frac{1}{(n^2+5n+2)^n}$

$(q)\ a_n = \frac{n^{\sqrt{n}}}{3^n}$ $\quad$ $(r)\ a_n = \frac{\cos(n!)}{n^2}$

$(s)\ a_n = \frac{n^2\sin n}{n^4+8}$ $\quad$ $(t)\ a_n = \big(\log(1+n^3+n^4)-4\log n\big)$

(2) Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n(1+n^\alpha)}}$, al variare di $\alpha > 0$.

(3) Studiare la convergenza semplice e assoluta di $\sum_n a_n$, dove

$(a)\ a_n = (-1)^n\left(3^{1/\sqrt{n}}-1\right)$ $\quad$ $(b)\ a_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ $\quad$ $(c)\ a_n = (-1)^n\frac{n+2}{n(n+1)}$

(4) Studiare la convergenza semplice e assoluta, al variare di $x \in \mathbb{R}$ di

$$(a)\ \sum_n \frac{n}{(x+1)^n}, \qquad (b)\ \sum_n \frac{(x-1)^n}{n^2}.$$

Soluzioni: **(1)** Serie divergente in $(a), (b), (c), (i), (k), (n), (t)$, convergente nei restanti casi.
(2) la serie converge per $\alpha > 5/3$, diverge per $0 < \alpha \leq 5/3$.