Prova finale di Analisi Matematica I
26 marzo 2007

Secondo parziale

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{e^{2x}\,(\cos\sqrt{x}\,-1)}{\sin(2x+\sqrt{x})\,\sqrt{\sin x}}\,.$

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\sqrt{x^2-1})}{x+e^{1/x}}\,.$

Esercizio 3. *a)* Determinare per quali valori di a, $b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x}+b & \text{se } \ 0 \le x < 1 \\ x\,|x-4| & \text{se } \ x \ge 1 \end{cases}$$

è derivabile per $x = 1$.
b) Per tali valori dei parametri, determinare massimo e minimo assoluti di f sull'intervallo $[0, 5]$.

Esercizio 4. Data la funzione $\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{|\log x - 1|}{x}}\,,$
a) determinare il dominio di f, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
b) stabilire in quali punti del dominio f è derivabile e calcolare la derivata di f;
c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo;
d) tracciare il grafico qualitativo di f.

Recupero primo parziale

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che per ogni numero naturale $n \ge 3$ vale

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\dots\left(2+\frac{1}{n}\right) \ge n+1\,.$$

Esercizio 2. Tramite la definizione di limite, verificare che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -\infty\,.$

Esercizio 3. Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventuali massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{\frac{n+1}{2n-3}\,;\quad n = 0, 1, \dots\right\}\,.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{n^2+2n}{n^2-n}\right)\log(2^n+1)\,.$