Corso di Laurea Specialistica in Matematica – a.a. 2007-08

Equazioni alle Derivate Parziali

Programma

1. Compattezza negli spazi metrici, ricoprimenti e ε-reti, compattezza e totale limitatezza [CAP. VI, GM]

2. Richiami su spazi normati e spazi di Banach, spazi di dimensione finita, esempi. Richiami sulla teoria degli operatori lineari. Spazi di funzioni continue, richiami sulla convergenza puntuale e uniforme. Criteri di compattezza, teorema di Ascoli-Arzelà, teoremi di approssimazione di Weierstrass via polinomi di Bernstein, approssimazioni di funzioni continue periodiche. Convoluzioni e approssimazioni della "delta" [CAP. IX, GM]

3. Spazio delle funzioni test, seminorme e topologia sullo spazio delle funzioni test. Distribuzioni. Derivate nel senso delle distribuzioni. Spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni rapidamente decrescenti, seminorme e topologia. Distribuzioni temperate $\mathcal{S}'$.

4. Trasformate di Fourier, trasformate su $\mathcal{S}$, dualità e aggiunzione e inversione, trasformate di Fourier in $\mathcal{S}'$. Trasformate in L^2 e teorema di Plancherel. Proprietà ed esempi.

5. Spazi di Sobolev H^s, prodotti scalari e norme hilbertiane, teoremi di immersione tra spazi H^s e duali. Teorema di immersione di Sobolev, teorema di immersione nello spazio delle funzioni continue e limitate.

6. Sistemi simmetrizzabili del primo ordine in una dimensione, esempi, sistemi lineari simmetrizzabili del primo ordine in più dimensioni a coefficienti costanti. Stima dell'energia, stime dell'energia per derivate di ordine alto, teorema di esistenza negli spazi H^s. Teorema di esistenza locale 1-D nel caso quasilineare.

7. Equazione lineare delle onde e cenno all'equazione di Schroedinger.

8. Richiami su spazi di Hilbert. Ortogonalità, teorema della proiezione. Spazio duale, teorema di rappresentazione di Riesz [1]. Il teorema di Lax-Milgram [2].

9. Lo spazio $H^1(I)$, $I \subset \mathbf{R}$ intervallo limitato; derivata debole, esistenza di un rappresentante continuo, regolarità. Lo spazio $H^1_0(I)$, legame con serie di Fourier, diseguaglianza di Poincaré, immersione compatta in $C(\overline{I})$ e in $L^2(I)$. Gli spazi $H^m(I)$, $m \geq 2$ [3, Cap. 8].

10. Applicazione a problemi ai limiti in dimensione 1 [3, Cap. 8]. Formulazione debole, esistenza di soluzioni deboli, regolarità. Esempi di problemi ai limiti con condizioni di Dirichlet e di Neumann.

    Problema agli autovalori. Teorema di decomposizione per il problema di Sturm-Liouville con condizioni ai limiti omogenee; autovalori semplici; formula di Rayleigh per il primo autovalore.

11. Problemi ellittici in dimensione $n > 1$, richiami su soluzioni classiche: funzioni armoniche, soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace, rappresentazione della soluzione su domini limitati [2].

12. Spazi di Sobolev su insiemi limitati in dimensione $n > 1$ [2]. Definizione tramite derivate deboli, completezza, approssimazione mediante funzioni C^∞, teorema di traccia (cenno dimostrazione). Lo spazio H_0^1: definizione, diseguaglianza di Poincaré (solo enunciato).

13. Applicazione a problemi uniformemente ellittici con condizioni di Dirichlet omogenee: formulazione debole, principio di Dirichlet. Un problema di Neumann omogeneo. [3, Cap. 9].

Riferimenti bibliografici

1. Appunti del Corso di ANALISI REALE E FUNZIONALE, V.Pata
   `http://www.mate.polimi.it/utenti/Pata`

2. L.C. Evans, Partial Differential Equations, AMS, 2002

3. H. Brezis, Analisi Funzionale, Liguori

GM Giaquinta, Modica, Analisi 3,

R J. Rauch "Partial Differential Equations" , Graduate Texts in Mathematics 128, Springer Verlag

Altro testo utile:

Salsa, Verzini, *Equazioni a derivate parziali. Complementi ed esercizi*, Springer