Laurea Magistrale in Matematica – a.a. 2008/09

Analisi Superiore 1

D. Amadori, D. Donatelli, F. Guarguaglini, C. Pignotti

1. Teoria della misura. Definizione di misura, esempi. Continuità della misura sulle successioni monotone. Insiemi di misura nulla, completamento di una σ-algebra. Misura esterna. Insiemi misurabili secondo Caratheodory, teorema di Caratheodory. Richiami sulla misura di Lebesgue. Sistemi di Dynkin e teorema di Dynkin.
Funzioni misurabili e loro proprietà. Approssimazione di funzioni misurabili tramite funzioni semplici. Integrale di una funzione semplice. La funzione di ripartizione.
Definizione di integrale di una funzione misurabile non-negativa tramite la funzione di ripartizione. Teorema di convergenza monotona. Integrale per funzioni misurabili a segno non costante.
Teoremi di passaggio al limite sotto al segno di integrale: lemma di Fatou, teorema di convergenza dominata. Applicazioni alle serie di funzioni.
Spazi L^p, $1 \leq p \leq \infty$: definizione, principali proprietà, completezza.
Sottoinsiemi densi in L^p: funzioni semplici, funzioni continue.
Misure prodotto.
Misure assolutamente continue. Il teorema di Radon-Nikodym. Misure mutualmente singolari. Decomposizione di Lebesgue di una misura rispetto a un'altra, teorema di Lebesgue. Misure con segno: definizione, esempi.

2. Distribuzioni. Funzioni localmente sommabili. Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$. Distribuzioni. Distribuzioni associate a funzioni localmente sommabili. Distribuzioni singolari. Esempi. Operazioni sulle distribuzioni: somma, prodotto per una funzione, cambio di variabile, restrizione, prodotto tensoriale. Ordine di una distribuzione. Derivazione e proprietà. Confronto con le derivate classiche. Derivazione di funzioni di salto. Operatori differenziali. Primitive di una distribuzione in $\mathcal{D}'(a,b)$. Partizione dell'unità. Supporto di una distribuzione. Distribuzioni a supporto compatto.

3. Convoluzione. Convoluzione negli spazi L^p. Regolarità della convoluzione. Successioni regolarizzanti. Regolarizzazione mediante convoluzione. Convoluzione tra distribuzioni. Regolarizzazione di distribuzioni. Densità di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

4. Funzioni BV e AC. Funzioni a variazione limitata e funzioni assolutamente continue. Proprietà ed esempi. Lemma del ricoprimento di Vitali. Derivazione delle funzioni monotone. Teorema fondamentale del calcolo. Funzione di Cantor.

5. Trasformata di Fourier. Lo spazio $\mathcal{S}(\Omega)$ delle funzioni rapidamente decrescenti e sue proprietà. Definzione di Trasformata di Fourier su $\mathcal{S}(\Omega)$ e sue proprietà. Trasformata inversa. Estensione della trasformata di Fourier su L^1 e L^2: Teorema di Riemann–Lebesgue e Teorema di Plancherel. Teorema di Hausdorff–Young. Trasformata di funzioni analitiche: Teorema di Paley Wiener. Lo spazio $\mathcal{S}'(\Omega)$ delle distribuzioni temperate e sue proprietà. La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'(\Omega)$. Applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni alle derivate parziali. Soluzioni fondamentali mediante trasformata di Fourier. Teorema di Malgrange–Ehrenpreis (senza dimostrazione). Applicazione della trasformata di Fourier agli spazi di Sobolev: definizione dello spazio H^s, $s \in \mathbb{R}$, teorema di immersione e di traccia.

6. Spazi di Sobolev. Derivate deboli. Spazi di Sobolev $W^{mp}(\Omega)$. Relazione tra $W^{1p}(\Omega)$ e funzioni assolutamente continue in una dimensione. Relazione tra $W^{1\infty}(\Omega)$ e funzioni lipschitziane. Approssimazione di Friedrichs. Regole di derivazione del prodotto, della composizione, del cambiamento di variabile (senza dimostrazione). Teorema di prolungamento e densità di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ in $W^{1p}(\Omega)$. Estensione dei risultati agli spazi $W^{mp}(\Omega)$. Spazi $W_0^{1p}(\Omega)$. Comportamento sul bordo di Ω delle funzioni $W_0^{1p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Teorema di traccia. Comportamento sul bordo di Ω delle funzioni di $W_0^{1p}(\Omega)$ (senza dimostrazione). Disuguaglianza di Gagliardo- Nirenberg-Sobolev. Teorema di immersione per $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ (senza dimostrazione). Teorema di Morrey. Immersioni per $W^{mp}(\mathbb{R}^N)$ (dimostrazione nel caso $pm < N$). Immersione di $W^{N1}(\mathbb{R}^N)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Immersioni per $W^{1p}(\Omega)$, $\Omega \in C^1$ (cenni di dimostrazione). Disuguaglianza di Poincare'. Cenno a immersioni per $W^{mp}(\Omega)$, $\Omega \in C^m$. Compattezza forte in $L^p(\Omega)$. Immersioni compatte per $W^{1p}(\Omega)$.

7. Equazioni ellittiche di secondo ordine. Il teorema di Lax-Milgram. Soluzioni deboli per problemi differenziali di tipo ellittico con condizioni di Dirichlet omogenee sul bordo. Esistenza e unicità della soluzione debole per certi operatori ellittici. Autovalori di $-\Delta$ con condizioni di Dirichlet omogenee sul bordo. Esistenza di una base hilbertiana per $L^2(\Omega)$, Ω aperto limitato.

8. Equazioni paraboliche di secondo ordine. Definizione di operatore parabolico. Soluzioni deboli per equazioni paraboliche. Esistenza di soluzioni deboli: approssimazione di Galerkin, costruzione di soluzioni approssimanti, stime di energia, esistenza ed unicità di soluzioni.

9. Equazioni iperboliche nonlineari del primo ordine. Definizione di sistema iperbolico. Sistemi iperbolici quasilineari, simmetrici. Esistenza di soluzioni deboli: approssimazione di soluzioni mediante regolarizzazione, stime a priori, esistenza ed unicità di soluzioni regolari. Sistemi iperbolici simmetrizzabili: esistenza di soluzioni regolari.

Testi consigliati

- L. Ambrosio, G. Da Prato, A. Mennucci, *An Introduction to Measure Theory and Probability*, `http://dida.sns.it/dida2/cl/07-08/folde2/pdf0`
- G. Gilardi, Analisi 3, McGraw-Hill.
- H. Brezis, Analisi Funzionale, Liguori Editore.
- L.C. Evans, Partial Differential equations, AMS.
- M. E. Taylor, Partial Differential equations, Nonlinear equations, vol. 3, Springer.