

Esercizi di Analisi Matematica I

13 novembre 2009

1. Calcolare estremo superiore, estremo inferiore dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} , specificando se si tratta di massimo o di minimo:

1. $\left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

2. $\left\{ \frac{1}{n^3}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

3. $\left\{ \frac{1}{1+n^2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$

4. $\{x : 1 \leq x^2 \leq 4\}$

5. $\{n^2 + 3 \cdot (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$

6. $\{\cos(\pi n), n \in \mathbb{N}\}$

7. $\left\{ \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{N} \right\}$

8. $\left\{ x \in \mathbb{R} : \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \right\}$

9. $\left\{ \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

2. Provare che valgono le seguenti affermazioni.

(a) Se $A \subset B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, allora $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

(b) Siano A e B due sottoinsiemi di \mathbb{R} non vuoti e limitati. Allora

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

3. Tramite la definizione di limite, verificare che

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} = 1, \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n-1}} = 0.$$

4. Usando la definizione di limite, verificare che vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}$, se e solo se $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - \ell) = 0$.