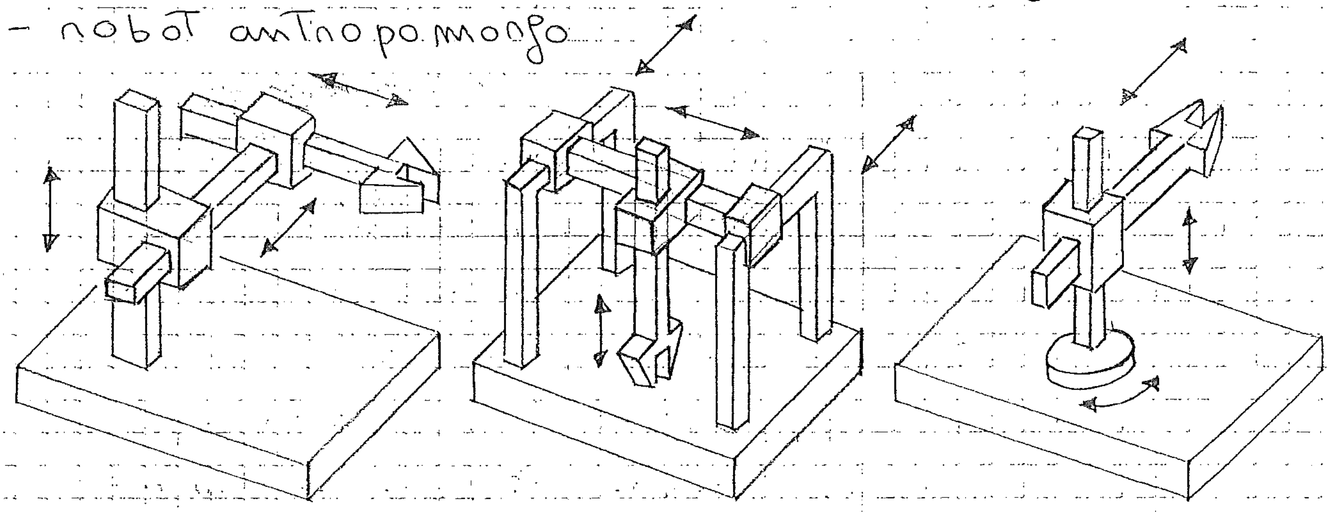
La robotica è lo studio di macchine che possono sostituire l'uomo nell'esecuzione di un compito, sia in termini di attività fisica che decisionale. Il termine ROBOT deriva dalla parola russa robota = lavoro esecutivo. La robotica si divide in robotica avanzata (ancora in età infantile) e robotica industriale (Tecnologia matura). Un ROBOT è una struttura multifunzionale e riprogrammabile progettato per spostare materiali, parti, utensili o dispositivi specializzati secondo movimenti variabili programmati per l'esecuzione di una varietà di compiti diversi (Robot Institute of America, 1980).

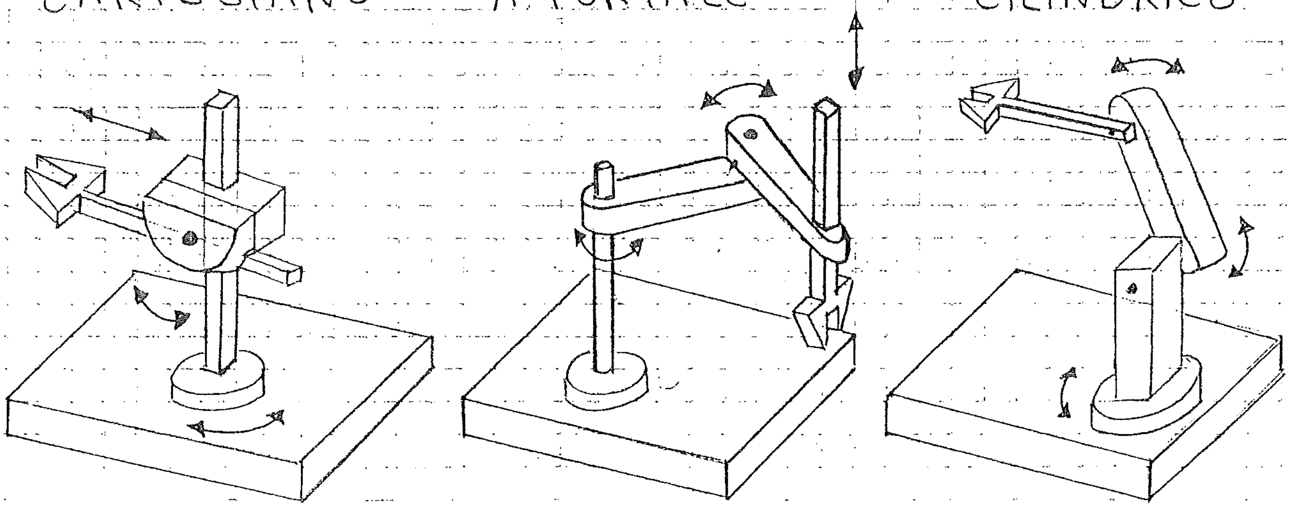
OSS.: Un tornio elettronico non è un robot perché anche se è programmabile, non è multifunzione. Allo stesso modo un escavatore meccanico non è un robot perché anche se può avere diverse funzioni, non è programmabile (ha bisogno di un operatore). Infine i manipolatori a distanza non sono tecnicamente dei robot in quanto sono costituiti da due parti: un master ed uno slave. Lo slave non deve far altro che riprodurre i movimenti effettuati dall'operatore il quale aziona il master.

Un Robot industriale è costituito da una struttura meccanica che consiste in un insieme di corpi rigidi (bracci) interconnessi tra loro per mezzo di articolazioni (giunti). Si individuano nel robot: una struttura portante, un polso ed un organo terminale, nonché attuatori e sensori, ed un unità di governo. Sono utilizzati per il trasporto, la manipolazione (lavorazione / assemblaggio) e la misura. È una struttura meccanica a catena cinematica aperta o a catena cinematica chiusa. Gradi di mobilità: giunti prismatici o rotatori. Gradi di libertà: descrizione di un compito. Spazio di lavoro = porzione dell'ambiente circostante (volume) a cui può accedere l'organo terminale.

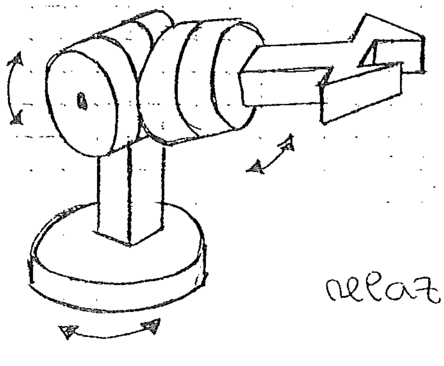
Tipi di robot esistenti:
- robot cartesiano
- robot a portale
- robot cilindrico
- robot sferico
- robot scara (Selective Compliance Assembly Robot Arm)
- robot antropomorfo



CARTESIANO   A PORTALE   CILINDRICO



SFERICO   SCARA   ANTROPOMORFO



POLSO SFERICO: mediante tre giunti rotatori, determina l'orientamento dell'organo terminale. L'organo terminale è specificato in relazione al compito da svolgere.

ROBOT: sono catene cinematiche (tipicamente aperte) costituite da sequenze di bracci e di giunti. Nomenclatura:

BRACCIO → LINK: corpo rigido compreso tra due giunti consecutivi

GIUNTO → JOINT: permettono il movimento relativo dei bracci e sono di due tipi:

n) { GIUNTO ROTATORIO O A CERNIERA → REVOLUTE JOINT
GIUNTO DI TRASLAZIONE O PRISMATICO → PRISMATIC JOINT

BRACCIO Ø: braccio solidale al sistema di riferimento fisso

COORDINATE INTERNE, O DI GIUNTO O VARIABILI DI CONFIGURAZIONE → INTERNAL COORDINATES OR JOINT COORDINATES OR CONFIGURATION VARIABLES: variabili o coordinate che in ∀ istante caratterizzano la posizione del robot descrivendo la posizione di ognuno dei suoi giunti.

COORDINATE CARTESIANE O OPERATIVE → CARTESIAN OR OPERATIVE COORDINATES: descrivono la posizione dell'organo terminale (ed eventualmente la sua orientazione) nello spazio operativo.

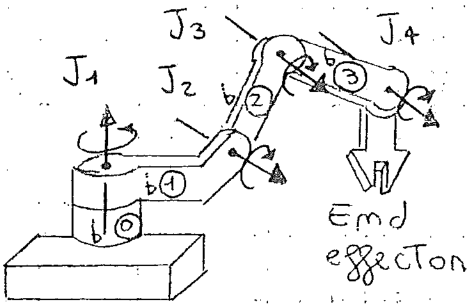
SPAZIO OPERATIVO → OPERATIVE SPACE: è lo spazio nel quale viene definito il compito o tipo di lavoro in coordinate cartesiane (detto anche spazio di configurazione dei giunti o spazio delle variabili dei giunti)

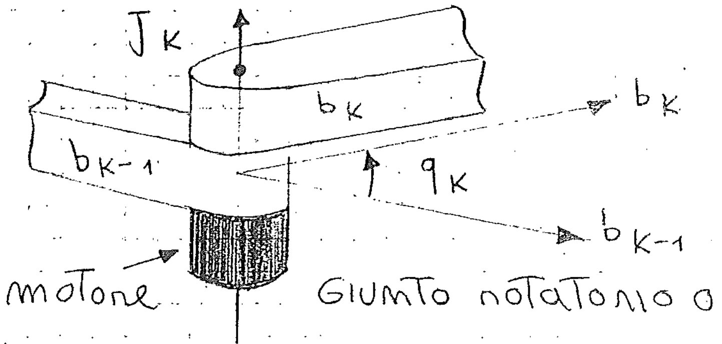
GRADI DI MOBILITÀ: sono il numero di giunti della catena cinematica indicato con n.

GRADI DI LIBERTÀ: servono a descrivere il compito da svolgere e vengono indicati con m. È il compito a dettare il numero di gradi di libertà richiesti.

le. SPAZIO DI LAVORO → WORKSPACE: spazio di lavoro volumetrico che il robot può raggiungere.
m.

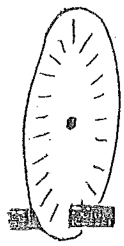
ORGANO TERMINALE → END-EFFECTOR: è la "mano" del sulla quale vengono montati utensili o strumenti per svolgere il compito. È caratterizzato da posizione ed orientazione. Tutti i giunti ed i bracci concorrono a determinare la sua posizione e la sua orientazione.



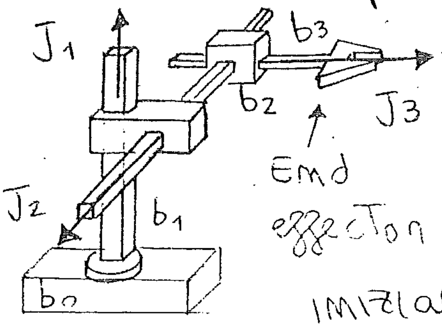


GIUNTO ROTATORIO O A CERNIERA

Lo statore è solidale al braccio b_{K-1} mentre il rotore è solidale al braccio b_K. L'angolo q_K che fornisce la posizione del braccio b_K rispetto a b_{K-1}, viene misurato mediante dispositivi che leggono gli angoli come gli encoder (dispositivi digitali moderni che sono costituiti da un disco di plexiglass con delle tacche oscurate e da un sistema fotodiodo + fototransistor ⇒ spostamento angolare e il verso di rotazione è misurato contando le tacche e tenendo conto dello sfasamento delle tacche) oppure i resolver (dispositivi analogici che hanno la struttura di un motore e leggono gli angoli basandosi sulla induzione elettromagnetica; ∃ tuttavia dispositivi di conversione AD integrati).



In questo modo il calcolatore conosce la posizione relativa di un braccio rispetto al precedente. Nel caso di giunto prismatico, J indica la direzione di scorrimento. Il robot cartesiano ha tre bracci perpendicolari connessi con tre giunti prismatici. Tratteremo inizialmente il Pb della cinematica del



del robot $\Rightarrow$ descrizione dei movimenti in funzione delle coordinate. <u>OSS</u>: Anche nel caso di giunti traslatori, la misura di spostamento si effettua attraverso una misura angolare.

Il <u>pb</u> cinematico del robot si divide in due sottoproblemi: il problema cinematico diretto e quello cinematico inverso.

CINEMATICA DIRETTA: problema di calcolare la posizione cartesiana (ed eventualmente l'orientamento) dell'end-effector in funzione delle variabili di configurazione. Si vogliono cioè conoscere le coordinate cartesiane in funzione di quelle di giunto:

$\boxed{x = K(q)}$ con $x \in \mathbb{R}^m \rightarrow$ rapp. di posizione ed orientamento dell'end effector.

$q \in \mathbb{R}^n \rightarrow n$: numero di giunti. <u>OSS</u>: Se siamo nello spazio tipicamente $m = 6$. Se $m < n \Rightarrow$ il robot ha più giunti dei gradi di libertà richiesti per svolgere il suo compito $\Rightarrow$ è <u>ridondante</u>.

Se parliamo di una traiettoria (invece che di una posizione) allora si considera: $x(t) = K(q(t))$.

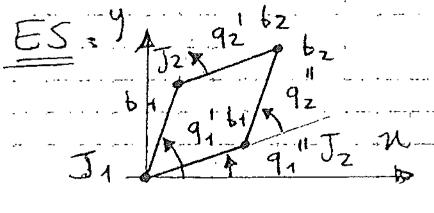
CINEMATICA INVERSA: problema di calcolare il valore delle variabili di configurazione del robot, data una certa posizione (o traiettoria) dell'end-effector nello spazio operativo (espressa in coordinate cartesiane):

$\boxed{q = K^{-1}(x)}$ oppure $q(t) = K^{-1}(x(t))$ con $\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^m \\ q \in \mathbb{R}^n \end{array}$

Il <u>pb</u> cinematico inverso è complicato (rispetto a quello diretto) dal fatto che l'inversione di K è difficile e non è unica nel caso di catene aperte.

<u>OSS</u>: Nel caso di catene cinematiche chiuse sarà invece il <u>pb</u> cinematico diretto ad essere più complesso di quello inverso.

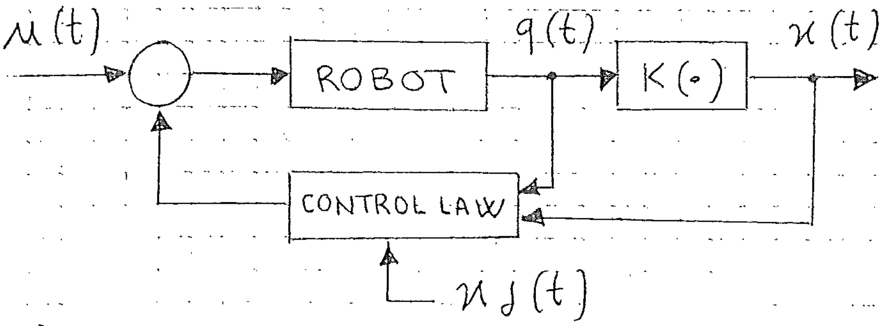
<u>ES</u>:



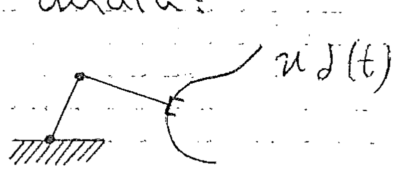
Lo spazio di lavoro è $\mathbb{R}^2$ con $m = 2$, il robot ha $n = 2$ (2 giunti $\Rightarrow$ 2 gradi di mobilità). Fissata una posizione dell'end-effector ho due possibili soluzioni del robot che soddisfano tale requisito: soluzione a gomito su (rosso) e quella a gomito giù (blu) $\Rightarrow$ ho soluzioni multiple ma finite se $n = m$. Se il robot è ridondante $\Rightarrow$ ho ∞ soluzioni possibili in quanto il robot può continuare a muoversi tenendo fisso l'end-effector. OSS: Nell'esempio si è trascurata l'orientazione dell'end-effector. Inoltre potrebbe per esempio non esistere la configurazione a gomito giù per motivi di fondo corsa della struttura meccanica (come nel gomito umano).

CINEMATICA: è importante per l'utente che vuole descrivere i moti che l'end-effector deve compiere Il mente dalle cause che li stanno provocando.

DINAMICA: è importante per il controllo perché mette in relazione gli ingressi del robot (cioè le coppie e le forze generate dai motori e che agiscono sui giunti) e le uscite (che sono le variabili giunto oppure quelle cartesiane attraverso una trasformazione cinetica diretta):



dove $x_d(t)$ è la traiettoria desiderata:



È necessario perciò conoscere come il robot reagisce agli ingressi ed elaborare una legge di controllo che in una struttura di controllo a controreazione permette di correggere gli ingressi effettivi in modo da avere una traiettoria il più possibile simile a $x_d(t)$. Il modello del robot è non lineare:

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))\,u(t)}$$

e si ricava applicando le leggi della meccanica classica. Anche in questo caso ∃ una dinamica diretta ed una meccanica inversa.

DINAMICA DIRETTA: date le coppie e le forze agenti sui giunti, si vuole conoscere la posizione o meglio l'accelerazione alla quale ciascun giunto è interessato:

$$\ddot{q}(t) = M(q,\dot{q},u) = A(q,\dot{q}) + B(q)u \quad \text{con:} \begin{cases} u(t) \in \mathbb{R}^m \\ q(t) \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

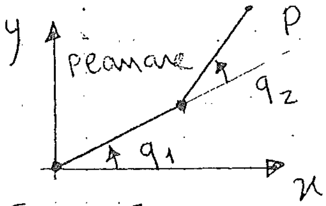
DINAMICA INVERSA: data una certa traiettoria per ogni giunto, quali devono essere le coppie agenti su ogni giunto?

$q_d(t) \rightarrow u(t)$: per il pb del controllo è una informazione molto importante. OSS: Al posto di $x_d(t)$ utilizziamo la notazione $p_d(t)$ per indicare la posizione in coordinate cartesiane dell'end effector (perché x generalmente è usato per indicare lo stato di un sistema).

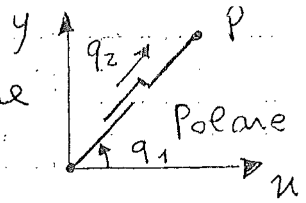
$$\boxed{p_d(t)} \longrightarrow \boxed{K^{-1}(\cdot)} \xrightarrow{q_d(t)} \boxed{\text{INVERSE DYNAMICS}} \longrightarrow u_m(t)$$

: coppia nominale

Si considerano coppie nominali, perché il modello dinamico non è accurato a causa dell'attrito, dei momenti d'inerzia non noti...). La coppia nominale produce effetti simili a quelli voluti, ma c'è bisogno cmq. di un feedback di controllo mediante il quale ∀ deviazione rispetto alla traiettoria desiderata viene compensata. Quindi la dinamica ha bisogno della cinematica. La STATICA è importante nella robotica avanzata per modellare le interazioni del robot con l'ambiente. TRAJECTORY PLANNING → → pianificazione delle traiettorie: si fa con le operazioni o le istruzioni MOVE P2, MOVE P_3. Per effettuare uno spostamento su linea retta dal punto P_2 al punto P_3 è necessario pianificare tale spostamento, infatti i giunti non avranno in generale delle traiettorie rettilinee. Studiamo ora la cinematica del robot planare che può essere di due tipi:

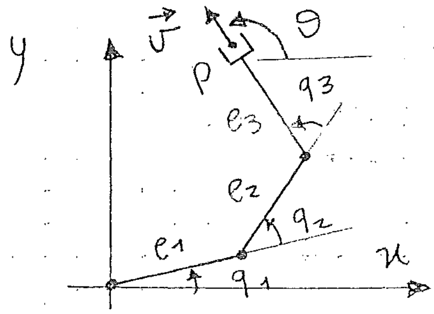


oppure



Il punto P può essere ad esempio il centro pinza (punto $\nexists$ geometricamente)

Si lavora in uno spazio operativo $\mathbb{R}^2$: $P(x,y)$ → non si considera l'orientamento. Consideriamo la cinematica del robot planare del primo tipo: abbiamo considerato un terzo



giunto che fornisce un orientamento all'end-effector → $P(x,y,\theta)$. Se ci disinteressiamo dall'orientazione dell'organo terminale ⇒ il robot diventa ridondante cioè può tenere lo stesso punto pur muovendosi. L'angolo θ è quello formato dal versore $\vec{v}$ orientato come l'end-effector con l'asse x. Sia $P=\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$ ⇒

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1+q_2) + l_3\cos(q_1+q_2+q_3) \\ l_1\sin(q_1) + l_2\sin(q_1+q_2) + l_3\sin(q_1+q_2+q_3) \\ q_1+q_2+q_3 \end{pmatrix}$$

CINEMATICA DIFFERENZIALE: lega le velocità di giunto a quelle cartesiane:

$$\dot{P} = \begin{pmatrix} l_1\sin(q_1)\dot{q}_1 + l_2\sin(q_1+q_2)(\dot{q}_1+\dot{q}_2) + l_3\sin(q_1+q_2+q_3)(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_3) \\ -l_1\cos(q_1)\dot{q}_1 - l_2\cos(q_1+q_2)(\dot{q}_1+\dot{q}_2) - l_3\cos(q_1+q_2+q_3)(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_3) \\ \dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

La cinematica differenziale in una forma più interessante:

$p = K(q) \Rightarrow \dot{p} = \dfrac{\partial K}{\partial q}\dot{q} = J(q)\dot{q}$ dove abbiamo imposto:

$J(q)$: Jacobiano (Jacobian) è una matrice che trasforma le velocità di giunto $\dot{q}$ in velocità cartesiane $\dot{p}$.

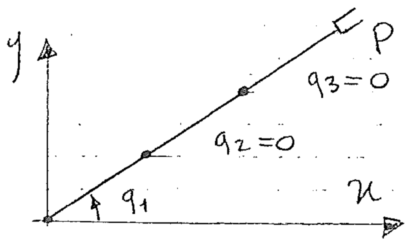
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial K_1/\partial q_1 & \partial K_1/\partial q_2 & \partial K_1/\partial q_3 \\ \partial K_2/\partial q_1 & \partial K_2/\partial q_2 & \partial K_2/\partial q_3 \\ \partial K_3/\partial q_1 & \partial K_3/\partial q_2 & \partial K_3/\partial q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \ell_1 \sin(q_1) + \ell_2 \sin(q_1+q_2) & \ell_3 \sin(q_1+q_2+q_3) \\ -\ell_1 \cos(q_1) - \ell_2 \cos(q_1+q_2) & -\ell_3 \sin(q_1+q_2+q_3) \\ 1 & 1 \end{array}\right]}_{J(q)} \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{bmatrix}$$

Per semplicità abbiamo indicato lo Jacobiano considerando solo i primi due bracci del robot planare.

Se $J(q)$ è quadrata (non ci sono più giunti che gradi di libertà) ed è invertibile posso calcolare la velocità di giunto che mi consente di avere una certa velocità cartesiana $\dot p_d$:

$$\dot q_d = J^{-1}(q)\, \dot p_d$$



<u>OSS</u>: Solo il robot cartesiano ha uno Jacobiano $\perp\!\!\!\perp$ dalla q. La situazione per la quale la matrice Jacobiana diventa singolare è quella in cui il braccio è completamente esteso: $q_2=q_3=0$:

$$J(q) = \begin{bmatrix} (\ell_1+\ell_2)\sin(q_1) & \ell_2 \sin(q_1) \\ -(\ell_1+\ell_2)\cos(q_1) & -\ell_2 \cos(q_1) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Il vettore $\begin{bmatrix} -\ell_2 \\ (\ell_1+\ell_2) \end{bmatrix}$ annulla lo Jacobiano $\Rightarrow$ se faccio muovere il robot con una velocità di giunto $\dot q$ proporzionale a tale vettore $\Rightarrow$ ho una <u>singolarità cinematica</u> $\Rightarrow$ il robot non può svolgere quel compito in $\mathbb{R}^2$ (ciò avviene quando il braccio è completamente esteso oppure è ripiegato su se stesso)

<u>ES</u>: Se consideriamo lo Jacobiano completo dell'esempio con tre bracci visto precedentemente:

$$J(q) = \left[\begin{array}{c|c|c} \ell_1 \sin q_1 + \ell_2 \sin q_{12} + \ell_3 \sin q_{123} & \ell_2 \sin q_{12} + \ell_3 \sin q_{123} & \ell_3 \sin q_{123} \\ -\ell_1 \cos q_1 - \ell_2 \cos q_{12} - \ell_3 \cos q_{123} & -\ell_2 \cos q_{12} - \ell_3 \cos q_{123} & -\ell_3 \cos q_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

<u>OSS</u>: Se lo Jacobiano ha un nullo diverso da zero non necessariamente siamo in presenza di singolarità cinematiche. Possono essere presenti ad esempio degli <u>automovimenti</u> $\Rightarrow$ ho uno spostamento nullo dell'end-effector con velocità dei giunti

diverse da zero. Questa situazione avviene quando il robot è ridondante cioè $n<m$ (più giunti che gradi di libertà).
La ridondanza viene sfruttata quando si vuole effettuare la riconfigurazione del braccio nella posizione di massima manipolabilità senza muovere l'organo terminale.
In conclusione lo Jacobiano presenta delle singolarità (cioè $N(J(q)) \neq 0$) quando siamo in particolari configurazioni (massima estensione, massimo raccoglimento) oppure quando c'è un automovimento. Un "set" di configurazioni è un insieme di configurazioni caratterizzate da posizioni simili delle componenti del robot (ad esempio gomito su, gomito giù ...). Per passare da un set di configurazioni ad un altro set bisogna passare attraverso punti di singolarità cinematiche. Quindi se la traiettoria non passa attraverso punti di singolarità cinematiche, siamo sempre dentro lo stesso set di istruzioni.
Risolvere il sistema

MECCANICA ANALITICA

I mezzi per lo studio della meccanica offerti dalla fisica classica non sono abbastanza potenti: se si applica la relazione del secondo principio della dinamica $F = ma$ al modello cinematico e dinamico del robot (che ha generalmente da $5 \div 7$ gradi di libertà) si ottengono equazioni molto lunghe e difficili. Si cerca una metodologia che consenta di descrivere in termini macroscopici la cinematica e la dinamica del robot

PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE

Un sistema meccanico è perfettamente determinato da una funzione $L(q, \dot{q}, t)$ detta funzione Lagrangiana che è funzione della variabile q (q sono le coordinate generalizzate del sistema meccanico e servono a descrivere tale sistema: coordinate di punti materiali, angoli, distanze e tutte quelle informazioni che in un certo istante "inchiodano" il sistema stesso $\rightarrow$ q è un vettore con tante componenti quante sono le coordinate d'interesse), della derivata di q rispetto al tempo ($\dot{q}$) ed eventualmente del tempo t. Si considerino due istanti di tempo: un istante iniziale t_1 ed uno finale t_2, ed un movimento o una evoluzione del sistema tra i due istanti di tempo fissato. Siano $q(t_1)$ e $q(t_2)$ le coordinate generalizzate all'istante t_1 e all'istante t_2.

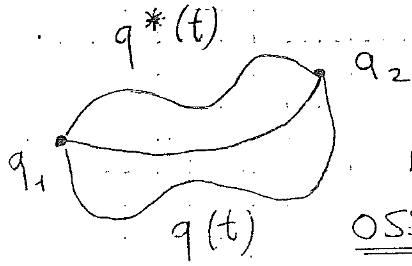
$q(t_2)$

$q(t_1)$ $q(t)$

Una evoluzione del sistema è una traiettoria che unisce $q(t_1) = q_1$ a $q(t_2) = q_2$ mentre $q(t)$ è la posizione (generalizzata) del sistema all'istante generico t. La funzione Lagrangiana gode della seguente <u>proprietà</u>: di tutte le possibili traiettorie che uniscono q_1 a q_2, quella che si verifica in natura è quella per cui è integrale di azione (o azione)". Definendo l'integrale di azione S:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt}$$

possiamo esprimere il principio di minima azione dicendo

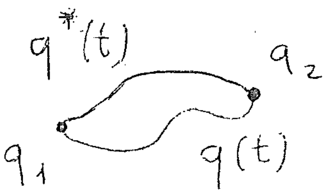


la traiettoria naturale che unisce q_1 a q_2 ($q^*(t)$) è quella per cui l'azione è minima, cioè $S = S_{min}$.

OSS: L'azione S è un numero che dipende dalla traiettoria $q(t)$ seguita ed è minimo quando tale traiettoria è quella naturale. Pb: Supponendo di conoscere la Lagrangiana per il sistema meccanico in esame, si vuole trovare la traiettoria naturale q^* che rende minima l'azione. (Trovare le leggi che regolano la minima azione). Quando si cercava il minimo di una funzione si trovava un valore, in questo caso devo minimizzare l'azione rispetto alla traiettoria $q(t) \Rightarrow$ non ottengo un valore ma una funzione (funzionale). Supponiamo che $q^*(t)$ sia tale che l'azione $S^* = S(q^*(t))$ sia minima:

$$S^* = S(q^*(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q^*(t), \dot{q}^*(t), t)\, dt$$ allora risulta:

$$\forall\, q(t) \neq q^*(t) \iff S(q^*) \leq S(q)$$



OSS: Ciò è vero solo nelle Hp in cui le traiettorie partono ed arrivano negli stessi punti agli stessi istanti cioè:

$$\begin{cases} q^*(t_1) = q_1 = q(t_1) \\ q^*(t_2) = q_2 = q(t_2) \end{cases}$$

Posso quindi pensare che una $\forall$ traiettoria $q(t)$ può essere scritta:

$$q(t) = q^*(t) + \delta q(t)$$

cioè come somma della traiettoria naturale più una certa perturbazione $\delta q(t)$ pari alla differenza tra $q(t)$ e $q^*(t)$. Inoltre possiamo dedurre: $q_1 = q(t_1) = q^*(t_1) \Rightarrow \boxed{\delta q(t_1) = 0}$

ed in modo analogo risulta:

$q_2 = q(t_2) = q^*(t_2) \Rightarrow \boxed{\delta q(t_2) = 0}$ Questo perché le traiettorie ammissibili sono quelle che si ottengono da quella naturale aggiungendo delle variazioni che sono però nulle in t_1 ed in t_2. Se a $q^*(t)$ sommo una variazione $\delta q(t)$ che rispetta le due condizioni trovate:

$$q(t) = q^*(t) + \delta q(t) \rightarrow S(q) = S(q^*) + \delta S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta S = S(q) - S(q^*) = \int_{t_1}^{t_2} L(q^*(t) + \delta q(t), \dot{q}^*(t) + \delta\dot{q}(t), t)\,dt +$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} L(q^*(t), \dot{q}^*(t), t)\,dt \Rightarrow$$ δS è un differenziale fatto rispetto ad una funzione $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ è una variazione prima. Così come il differenziale di una funzione in un punto di minimo è nullo, così la variazione del funzionale per una traiettoria di minimo deve essere nulla.

La condizione necessaria di minima azione è è annullarsi della variazione:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q^* + \delta q, \dot{q}^* + \delta\dot{q}^*, t) - L(q^*, \dot{q}^*, t) \right] dt = 0 \Rightarrow$$

OSS

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{q^*} \delta q + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right|_{\dot{q}^*} \delta\dot{q} \right] dt \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$$

OSS:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} \delta\dot{q}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} \left[\frac{d}{\cancel{dt}}(\delta q) \right] \cancel{dt} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*}\, d(\delta q) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} \right) \delta q(t)\,dt$$

$\rightarrow$ Integrazione per parti

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^*} \delta q - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} \delta q \right] dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} \delta q(t) \Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^*} \delta q - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} \delta q \right] dt + \underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}}}_{0} = 0 \Rightarrow$$

CONDIZIONE DI TRASVERSALITÀ: il termine

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*}\,\delta q(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*}\left(\delta q(t_2) - \delta q(t_1)\right) = 0$$

perché abbiamo dimostrato precedentemente che si ha $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, quindi otteniamo:

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q^*} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*}\right]\delta q\, dt = 0$$

Visto che $\delta q(t)$ è una funzione nulla in t_1, t_2 ma cmq variabile in $\forall$ altro istante generico t, affinché l'integrale (che rappresenta la variazione di azione) sia nullo e quindi l'azione sia minima (come dettato dalla CN), deve necessariamente essere nullo il termine in parentesi quadre:

$$\delta S = 0 \text{ per } \forall\, \delta q \iff \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^*} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^*} = 0}$$

L'equazione scritta è l'<u>eq. del moto</u> o <u>di Lagrange</u>. L'equazione di Lagrange è però

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

ed è soddisfatta per $q = q^*$, inoltre visto che la funzione di Lagrange $L(q, \dot{q}, t)$ risulta che il secondo termine della equazione di Lagrange è una funzione di $q, \dot{q}$ e $\ddot{q}$, infatti:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \varphi_1(q, \dot{q}, t) \quad \text{mentre} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \varphi_2(q, \dot{q}, t) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \varphi_1(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt}\varphi_2(q, \dot{q}, t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial q}\frac{dq}{dt} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \dot{q}}\frac{d\dot{q}}{dt} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1(q, \dot{q}, t) - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1(q, \dot{q}, t) - F(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$$

L'equazione di Lagrange è quindi una eq. differenziale del secondo ordine in q in generale non lineare. Ha bisogno di due C.I. o al contorno per essere risolta. In questo caso si conoscono gli estremi non è precisamente un Pb di Cauchy (nel quale si conoscono le condizioni iniziali per $t=0$) ma è un problema 2point:

$$\begin{cases} q(t_1) = q_1 \\ q(t_2) = q_2 \end{cases}$$

conosciamo il valore della funzione in due istanti di tempo diversi da t_0. Se q è un vettore $\Rightarrow$ le eq. di Lagrange si devono scrivere $\forall$ componenti del vettore stesso:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Le equazioni sono del tipo: $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \Rightarrow$$ con $i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow \varphi_i(q_i, \dot{q}_i, t) - F_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) = 0 \Rightarrow$ ottengo un sistema di n eq. differenziali del secondo ordine che, mediante artifici visti in Teoria dei sistemi, possono scriversi come $2n$ eq. differenziali del primo ordine. OSS: Suona bene che le eq. del moto siano equazioni del secondo ordine (infatti $F = ma = m\ddot{x}$ è una eq. diff. del II° ordine).

OSS: Se ho due sistemi meccanici A e B che non interagiscono: A determinato da una funzione di Lagrange L_A e B determinato da una L_B (i due sistemi non interagiscono solo se sono posti a distanza ∞ oppure se c'è interazione, ad esempio quella gravitazionale, risulta essere trascurabile), allora la Lagrangiana del sistema complessivo A+B è $L = L_A + L_B$.

Infatti siano: $\begin{cases} L_A = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) \\ L_B = L_B(q_B, \dot{q}_B, t) \end{cases}$ le eq. di Lagrange $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L_A}{\partial q_A} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_A} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L_B}{\partial q_B} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L_B}{\partial \dot{q}_B} = 0 \end{cases}$$

Se ora scrivo le eq. di Lagrange del sistema complessivo: $L = L_A + L_B = L(q_A, q_B, \dot{q}_A, \dot{q}_B, t$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_A} = \frac{\partial L_A}{\partial q_A} \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial q_B} = \frac{\partial L_B}{\partial q_B}$$

Quindi il sistema complessivo A+B è definito da un sistema di eq. di Lagrange composto dalle eq. di Lagrange dei due sistemi A e B che compongono il sistema complessivo

OSS: Se c'è una interazione (interferenza) tra due sistemi A e B, il sistema complessivo ha una Lagrangiana $L \neq L_A + L_B$. Infatti la Lagrangiana del sistema complessivo è pari alla somma delle Lagrangiane di A e di B più un potenziale che tiene conto delle interazioni.

OSS: La funzione Lagrangiana che descrive un sistema meccanico ha due tipi di indeterminazione $\Rightarrow$ non è univoca. Il primo tipo di indeterminazione deriva dal fatto che la L è // rispetto ad una costante moltiplicativa, infatti tale costante può essere portata fuori dall'integrale. Il secondo tipo di indeterminazione deriva dal fatto che la L è unica a meno di una derivata rispetto al tempo di una funzione f arbitraria.

DIM: Supponiamo che il sistema meccanico sia descritto da $L(q,\dot{q},t)$. Se considero una $L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t)$ con f arbitrario, allora anche L' è una descrizione equivalente dello stesso sistema meccanico se e solo se, laddove $\exists$ un minimo per L, $\exists$ un minimo anche per L' (devono cioè avere la stessa traiettoria naturale q^*):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt \rightarrow \delta S(q) = S(q) - S(q^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta S(q^*) = S(q^*) - S(q^*) = 0$$ mentre per L':

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t) \right] dt =$$

$$= S + \left[f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta S'(q) = S'(q) - S'(q^*) = S(q) + \left[f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1) \right]$$

$$- S(q^*) - \left[f(q^*(t_2),t_2) - f(q^*(t_1),t_1) \right] = S(q) - S(q^*) \Rightarrow$$

Perché $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ cioè le variazioni di q sono nulle in t_1 e t_2

$\Rightarrow \delta S' = \delta S \Rightarrow L'$ è una lagrangiana equivalente a L in quanto $\delta S(q^*) = \delta S'(q^*) = 0 \Rightarrow$ l'azione costruita a partire da L' ha lo stesso minimo di L. ☒

PRINCIPIO DI RELATIVITÀ GALILEIANA (O DI GALILEI)

Le leggi (o le equazioni) della fisica classica non cambiano rispetto a riferimenti galileiani (cioè rispetto a riferimenti che si muovono uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme) $\Rightarrow$ il tempo è lo stesso in $\forall$ riferimento. OSS: Questo principio è vero solo a velocità << di quella della luce, infatti $\exists$ anche il principio di relatività ristretta che dice che il tempo dipende anche dalla velocità del sistema di riferimento scelto. Si consideri una particella o punto materiale in movimento: essa è descritta dalle coordinate generalizzate:

$$v \nearrow \; q, \dot{q} \rightarrow L(q, \dot{q}, t) \qquad q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

cioè dalla posizione e dalla velocità v:

$L(\underbrace{x, y, z}_{\rho}, \underbrace{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}}_{v = \dot{\rho}}, t)$ Visto che lo spazio è isotropo (le leggi della meccanica sono vere in $\forall$ direzione) per cui il lagrangiano del punto materiale non può dipendere dalla sua posizione (cioè da q) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0} \Rightarrow \text{Si può cambiare riferimento } \forall$$

deriva dall'equazione di Lagrange

Inoltre si ricava $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{cost.}}$ ⊙

Per il principio di relatività di Galilei il lagrangiano non può dipendere dal tempo (le leggi della fisica sono $\perp$ dal tempo che è assoluto) $\Rightarrow$ il sistema è stazionario $\Rightarrow$

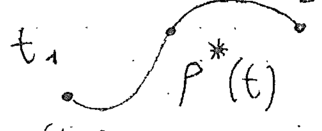
$\Rightarrow L = L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Considerando inoltre la ⊙, si ha in genere che $\dot{q}$ ha tre componenti. Se scegliamo il riferimento in modo che $\dot{q}$ abbia un'unica componente che coincide con il modulo di $\dot{q}$ (visto che lo spazio è isotropo posso scegliere un riferimento come voglio) $\Rightarrow$ il lagrangiano dipenderà solo dal modulo della velocità $\dot{q}$ (modulo quadro per semplicità): $L = L(|v|^2) = L(\underbrace{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}_{|\dot{q}|^2 = |v|^2 = V^2})$

Poiché L non dipende da $\dot{q}$, ma dipende solo da $|\dot{q}|$, considerando la ⊙ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial V^2} = \text{cost}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{L = aV^2}$ Questo risultato deriva dalle Hp di isotropia dello spazio e di validità del principio di relatività galileiana. Si trova che la costante $a = \frac{m}{2}$ dove m è la massa della particella $\Rightarrow$ la funzione lagrangiana di un punto materiale di massa m che si muove a velocità V rappresenta l'energia cinetica del punto stesso. Se ho un sistema composto da tanti punti materiali o particelle non interagenti tra loro, la lagrangiana vale:

$$\boxed{L = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha V_\alpha^2}$$ con $\partial L / \partial V^2 = \text{cost}$, $L = L(V^2)$

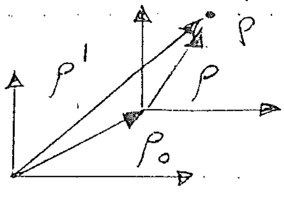
RIC: La lagrangiana del punto materiale nello spazio è: $L(\rho, \dot{\rho}, t)$ con $\rho = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Si suppongono vere due ipotesi:

1) Le leggi della fisica sono invarianti rispetto al tempo:



$\rho(t_2) = \rho_2$
$\rho(t_2 + \Delta t) = \rho_2$
$\rho(t_1) = \rho_1$
$\rho(t_1 + \Delta t) = \rho_1$

cioè se ripeto un certo esperimento dopo un tempo Δt, devo ottenere gli stessi risultati che ho ottenuto con l'esperimento precedente (a parità di condizioni iniziali) $\Rightarrow$ la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo t;

2) 

Se cambiamo il riferimento, cioè operiamo una traslazione, il Lagrangiano non non cambia. Il lagrangiano è quindi invariante rispetto a cambi di riferimento ($\rho' = \rho_0 + \rho$), perchè lo sono le leggi della fisica: $L(\rho,\dot\rho) = L(\rho+\rho_0,\dot\rho) \ \forall \rho_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ necessariamente la lagrangiana è ⫫ dal primo argomento ρ $\Rightarrow$ il lagrangiano di un punto materiale libero è una funzione di $\dot\rho$ (velocità) o meglio di un vettore velocità. Tuttavia L non può essere funzione della direzione di $\dot\rho$ perchè posso sempre operare una rotazione del riferimento che mi faccia scrivere $\dot\rho$ scomposto in una sola componente $\equiv$ con il suo modulo $\Rightarrow$ L dipenderà solo dal modulo di $\dot\rho$ o meglio dal modulo quadro visto che la radice quadrata verrà assorbita dalla funzione L

$L = L(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) = L(|\dot\rho|^2) = L(|v|^2) = L(V^2)$. Visto che L ⫫ da ρ risulta che la sua $\frac{\partial}{\partial \rho}$ è nulla cioè:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = \text{cost.}$$

Deriva dalla equazione di Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = \text{cost.} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot x} = \text{cost.}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot y} = \text{cost.}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot z} = \text{cost.}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot x^2} 2\dot x = \text{cost.}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot y^2} 2\dot y = \text{cost.}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot z^2} 2\dot z = \text{cost.}_3 \end{cases} \Rightarrow$$

<u>OSS</u>: $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial f(x)} \cdot \frac{d f(x)}{dx}$

<u>OSS</u>: Visto che $L = L(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$ risulta: $\frac{\partial L}{\partial \dot x^2} = \frac{\partial L}{\partial \dot y^2} = \frac{\partial L}{\partial \dot z^2} = K = \text{cost}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2K\dot x = \text{cost}_1 \\ 2K\dot y = \text{cost}_2 \\ 2K\dot z = \text{cost}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x = \text{cost}_1 \\ \dot y = \text{cost}_2 \\ \dot z = \text{cost}_3 \end{cases} \Rightarrow \dot\rho = \text{cost.} \Rightarrow$$

Il punto materiale si muove a velocità costante

• PRINCIPIO DI INERZIA (è stato ottenuto direttamente dal principio di minima azione). <u>OSS</u>: $L(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) = \sin(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot x^2} = \frac{\partial L}{\partial \dot y^2} = \frac{\partial L}{\partial \dot z^2} = \cos(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$.

Il lagrangiano di un punto materiale è quindi una V^2: $L(V^2)$

con $v^2 = \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$. Passiamo ora a ricavare un altro principio della meccanica classica (legge di Newton: $F=ma$);
Consideriamo un riferimento che si muove a velocità ε rispetto al riferimento con cui abbiamo costruito L del sistema:

$$\dot{\rho}' = \dot{\rho} + \varepsilon \Rightarrow \dot{\rho}'^2 = v'^2 = (\dot{\rho}+\varepsilon)^T(\dot{\rho}+\varepsilon) = \dot{\rho}^T\dot{\rho} + 2\varepsilon^T\dot{\rho} + \varepsilon^T\varepsilon$$

$\Rightarrow v'^2 = v^2 + 2\varepsilon^T\dot{\rho} + \varepsilon^2$ Il lagrangiano calcolato rispetto al riferimento che si muove a velocità ε è il seguente:

$$L(v'^2) = L(v^2 + 2\varepsilon^T\dot{\rho} + \varepsilon^T\varepsilon) \cong L(v^2) + \underline{\underline{\frac{\partial L}{\partial v^2} 2\varepsilon^T\dot{\rho}}}$$

Sviluppo in serie di Taylor al primo ordine di L (si trascurano i termini infinitesimi ε^2)
Il lagrangiano ottenuto deve rappresentare lo stesso fenomeno rappresentato dal lagrangiano sul primo riferimento per è $\underline{Hp}$ $\underline{\underline{2}}$) fatta 2 facciate prima $\Rightarrow$ il termine sottolineato in verde deve necessariamente rappresentare la derivata di una funzione $\varphi(t)$ $\forall$ fatta rispetto al tempo:

$\frac{\partial L}{\partial v^2} 2\varepsilon^T\dot{\rho} = \frac{d}{dt}\varphi(t)$ visto che $\dot{\rho} = \frac{d\rho(t)}{dt}$ deve necessariamente risultare che $\frac{\partial L}{\partial v^2} 2\varepsilon^T = \text{cost.} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial v^2} = \text{cost.}}$

$\Rightarrow L(v^2) = a v^2$ con $a = \text{cost.} = \frac{m}{2}$ ed m = massa del punto materiale. Quindi il lagrangiano di una particella libera di muoversi è $L(v^2) = \frac{1}{2} m v^2$ cioè è l'energia cinetica della particella. Se ho un insieme di particelle che $\underline{\text{NON}}$ interagiscono, il lagrangiano complessivo è:

$L = \Sigma_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \underline{\underline{T}}$: <u>energia cinetica</u> del sistema meccanico. Se facciamo cadere l'$\underline{\underline{Hp}}$ di non interazione $\Rightarrow$ il lagrangiano di un sistema meccanico composto da un insieme di particelle <u>interagenti</u> tra di loro è:

$$\boxed{L = \Sigma_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 - U(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\alpha, \ldots, \rho_n)}$$

U: funzione che dipende dalla posizione delle particelle interagenti tra loro (tanto più le particelle sono vicine, tanto maggiore sarà l'interazione) che prende il nome di **energia potenziale**. L'equazione di Lagrange diventa allora:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\rho_\alpha} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial \rho_\alpha} - \frac{d}{dt} m_\alpha v_\alpha \quad \text{con } \dot\rho_\alpha = v_\alpha$$

↳ Visto che ρ_α compare solo in U

$$\Rightarrow \boxed{m_\alpha \frac{d}{dt} v_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \rho_\alpha} = F_\alpha}$$

LEGGE DI NEWTON O SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA ($F = ma$)

Anche questo principio è stato dedotto direttamente dal principio di minima variazione.

OSS: F_α prende il nome di forza e viene definita pari a meno il gradiente dell'energia potenziale: $F_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \rho_\alpha}$

Passiamo ora a dedurre il principio di conservazione. Si consideri una funzione di Lagrange:

$L(q,\dot q) = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_n) = L(q_i, \dot q_i)$ con $i = 1, \dots, n$. Si ha che q_i e $\dot q_i$ sono delle coordinate generalizzate (angoli, distanze ...) tali da individuare il sistema meccanico. Se calcoliamo la derivata della L nel tempo:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i \Rightarrow$$

Dall'eq. di Lagrange otteniamo: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_i \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\dot q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i\right] = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right)$$

derivata del prodotto di 2 funzioni

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right) \Rightarrow \text{Portando tutto a 1° membro}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[L - \sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i = \text{cost}' \Rightarrow \text{definendo cost.} = -\text{cost}'$$

$\Rightarrow \boxed{-L + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) = \text{cost.} = E}$ dove E è l'energia totale del sistema meccanico, che deve rimanere costante (se il sistema stesso è isolato): per vedere come questa condizione esprima il principio di conservazione, si consideri un insieme di punti materiali descritto dalla Lagrangiana:

$L = T(q,\dot{q}) - U(q)$ con $T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$ con $v_\alpha = \dot{q}_\alpha$

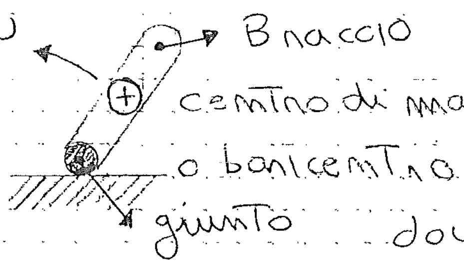
$\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = m_\alpha v_\alpha \Rightarrow$ Sostituendo nella eq. trovata:

$$-L + \sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} v_\alpha\right) = -\sum_\alpha\left(\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2\right) + U(P_1,P_2,\dots,P_n) +$$

$$+ \sum_\alpha\left[(m_\alpha v_\alpha) v_\alpha\right] = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + U(P_1,P_2,\dots,P_n) = E =$$

cost. $\Rightarrow \boxed{T(q,\dot{q}) + U(q) = \text{cost.} = E}$ L'energia totale del sistema meccanico è costante ed è pari alla somma dell'energia cinetica e di quella potenziale ($\Longleftrightarrow$ il sistema è chiuso o isolato dall'esterno): PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA. OSS: Si può dimostrare che anche l'impulso si conserva. OSS: La lagrangiana di un sistema è sempre pari alla differenza tra la energia cinetica e l'energia potenziale: $L = T - U$.

EX: Considerando sistemi isolati, le forze esterne agenti sul sistema sono nulle: $L = T - U$. L'energia cinetica di un braccio



che ruota attorno ad un giunto è esprimibile come:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$ Teorema di KÖNIG

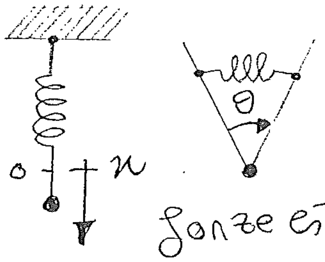
dove abbiamo indicato con:

I: momento d'inerzia del braccio rispetto al giunto.

ω: velocità angolare del braccio

m: massa del braccio e v_{CM}: velocità del baricentro.

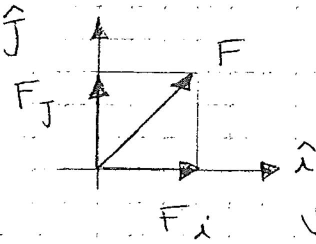
Per quanto riguarda l'energia potenziale, ne ∃ di due tipi: energia potenziale gravitazionale: $U = mgh$ che dipende dalla posizione h del centro di massa del braccio; e la energia potenziale elastica che può essere lineare o angolare: $U = \frac{1}{2} K x^2$ oppure $U = \frac{1}{2} K \theta^2$ dove K è la costante elastica della molla impiegata. Partendo dalla conoscenza del principio di minimizzazione e dalle eq. dell moto di Lagrange ricaviamo le eq. che descrivono l'evoluzione del sistema.



Le eventuali forze esterne che saranno presenti (che sono alla base della realizzazione del controllo) non entrano direttamente nella Lagrangiana (perché ci può essere perdita di stazionarietà). La L rimane sempre del tipo T-U, le forze esterne entrano poi in gioco quando scrivo l'eq. della Lagrangiana:

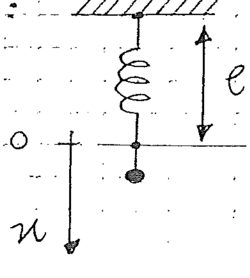
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -F_i}$$

dove con F_i si è indicata la risultante delle forze esterne che agiscono lungo la direzione della coordinata lagrangiana (o generalizzata) q_i. <u>OSS</u>: Nel caso mostrato a SX, la forza F compare sia nelle eq. lagrangiana i-ma con la componente F_i sia in quella J-ema con la componente F_J cioè nelle eq. relative rispettivamente alle coordinate generalizzate q_i e q_J.



La F va intesa come forza generalizzata, cioè se q_i è una coordinata generalizzata che rapp. un angolo ⇒ F è un momento o una coppia.

<u>EX. 1</u>: Supponiamo di avere un punto materiale appeso ad una molla di costante elastica K e di lunghezza a riposo ℓ, soggetto alla forza di gravità e ad una forza di attrito



viscoso. Scegliamo l'unica coordinata $q = x$ con l'asse lungo la direzione della molla, centrato nella posizione a riposo della molla (a potenziale supposto pari a zero) $\Rightarrow$ il sistema ha un solo grado di libertà (per la rappresentazione nello spazio di stato ho bisogno di due componenti per lo stato). La lagrangiana del sistema è $L = T - U$ con:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \text{ed} \quad U = \underbrace{\frac{1}{2} K x^2}_{\text{ELASTICA}} - \underbrace{m g x}_{\text{GRAVITAZIONALE}}$$

<u>OSS</u>: L'energia potenziale gravitazionale diminuisce al crescere della coordinata x mentre l'energia potenziale elastica cresce sia che la x cresca sia che la x diminuisca. Quindi la lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2 + m g x \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -Kx + mg \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$ Quindi l'equazione di Lagrange del moto è:

$\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -F_e$ Avendo indicato con $F_e = -b\dot{x}$ la forza di attrito viscoso, che è una forza esterna di tipo non conservativo ($\perp\!\!\!\perp$ dalla posizione e proporzionale alla velocità) che si oppone al moto della particella.

$\Rightarrow -Kx + mg - m\ddot{x} = b\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = mg$

eq. della dinamica del punto materiale soggetto alle forze descritte. Ricaviamo la stessa eq. con l'approccio fisico classico basato sulla legge di Newton: $\sum_i f_i = m\ddot{x} \Rightarrow$

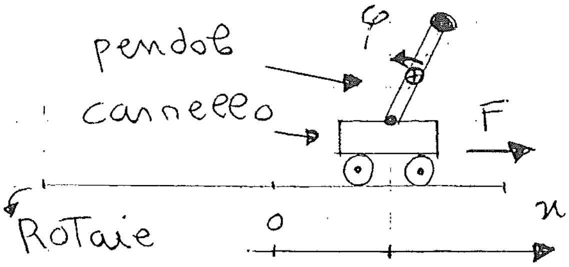
(se è un corpo rigido $\sum_i c_i = I\alpha$)

$\Rightarrow mg + (-b\dot{x}) + (-Kx) = m\ddot{x}$ c.v.d. ■

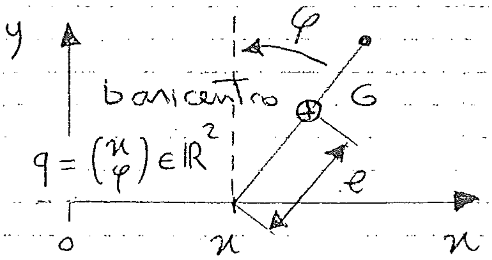
<u>OSS</u>: La forza elastica $-Kx$ è pari a meno il gradiente della energia potenziale elastica.

<u>EX. 2</u>: PENDOLO INVERSO: La struttura è costituita da un carrello libero di muoversi su una rotaia di dimensione

finita, vincolato all'inizio e alla fine della rotaia ed attuato dall'esterno mediante forze parallele alla direzione



delle rotaie. Sul carrello è incernierata un'asta senza attrito che può ruotare liberamente attorno ad una cerniera senza attrito. La posizione verticale dell'asta è di equilibrio instabile (non è attuata) $\Rightarrow$ questo è il motivo per cui è chiamato pendolo inverso. È lo stesso problema che si incontra quando bisogna controllare l'assetto di un razzo vettore al decollo. È una struttura non lineare ed ha due gradi di libertà: la posizione x rispetto al punto medio della rotaia e la posizione angolare φ dell'asta rispetto alla verticale. Note x e φ, la posizione del sistema nello spazio è univocamente determinata. Le grandezze sono: M: massa del carrello, m: massa dell'asta,



l: distanza del baricentro dell'asta dalla cerniera, J: momento d'inerzia dell'asta attorno alla cerniera, F: è la forza esterna che agisce orizzontalmente lungo la direzione // alle rotaie. Supponiamo $\nexists$ forze d'attrito $-b\dot{x}$ e $-c\dot{\varphi}$ (per la seconda è uno sforzo in quanto è essa a garantire la stabilità asintotica del sistema). Calcoliamo le coordinate e la velocità del baricentro utili per calcolare rispettivamente U e T. G è il baricentro:

$$G: \begin{cases} x_G = x + l\sin\varphi \\ y_G = l\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow v_G: \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y}_G = -l\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_G^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_G^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

L'energia cinetica del sistema carrello + asta mobile è:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{x}^2}_{\text{carrello}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_G^2}_{\text{asta mobile}} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 +$$

Sostituendo v_G^2

$$+ \frac{1}{2}(I + m\ell^2)\dot{\varphi}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi = T(q,\dot{q})$$

L'energia potenziale si pone nulla per $y=0 \Rightarrow$ il carrello non ha energia potenziale mentre l'asta ha una energia potenziale dipende dalla posizione y_G del baricentro.

$$U = mg\,y_G = mg\,\ell\cos\varphi = U(q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = T - U = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(I + m\ell^2)\dot{\varphi}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + - mg\,\ell\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 & \text{perché } x \text{ non compare in } L \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\ell\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow$$ Sostituendo nelle eq. Lagrange.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m+M)\ddot{x} + m\ell(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \Rightarrow$$

L'eq. di Lagrange è: $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -F \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(m+M)\ddot{x} + m\ell(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = F}$$ Con F concorde a x

Eq. del moto lungo la coordinata x. OSS: Le eq. di Lagrange si scrivono ma non si risolvono perché ho un sistema di eq. differenziali non lineari $\Rightarrow$ si risolve numericamente o si linearizzano attorno ad un punto di equilibrio.

$$L \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = - m\ell\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + mg\ell\sin\varphi \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I + m\ell^2)\dot{\varphi} + m\ell\dot{x}\cos\varphi \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (I + m\ell^2)\ddot{\varphi} + m\ell(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi)$$

L'equazione di Lagrange è: $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \Rightarrow$

La forza esterna F non agisce lungo la direzione della coordinata generalizzata φ

$$\Rightarrow -ml\cancel{\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi} + mgl\sin\varphi - (I+ml^2)\ddot{\varphi} +$$
$$-ml(\ddot{x}\cos\varphi - \cancel{\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{ml(g\sin\varphi - \ddot{x}\cos\varphi) - (I+ml^2)\ddot{\varphi} = 0}$$

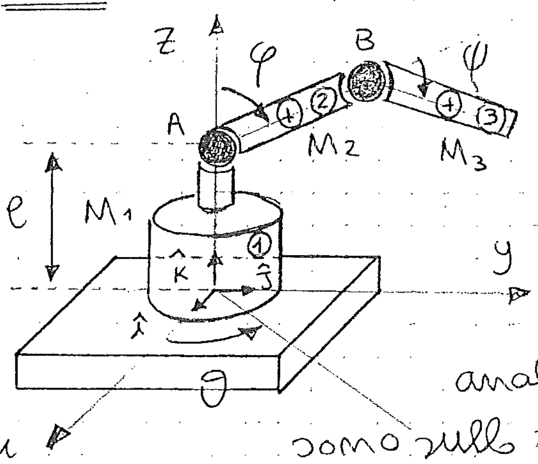
Eq. del moto lungo la coordinata φ.

Il sistema pendolo inverso è descritto dalle:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = F \\ ml(g\sin\varphi - \ddot{x}\cos\varphi) - (I+ml^2)\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

che può essere risolto solo se sono note le coordinate iniziali $x(t_0)$ e $\varphi(t_0)$ $\rightarrow$ Problema di Cauchy.

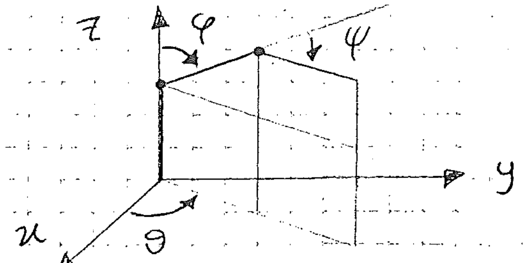
<u>EX. 3</u> ROBOT ANTROPOMORFO A TRE BRACCI



Solo il braccio ① (detto braccio zero) può ruotare attorno all'asse z ed il movimento è individuato da θ. Il secondo braccio ruota rispetto a z ed il terzo braccio si muove in modo analogo al secondo. <u>OSS</u>: I bracci ② e ③ sono sullo stesso piano e spannano tutto $\mathbb{R}^3$ grazie a θ. Si suppone che TUTTI i bracci hanno lunghezza l $\Rightarrow$ il centro di massa è in $l/2$ se i bracci sono anche omogenei rispetto alla lunghezza. L'energia cinetica del braccio ① è:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cancel{M_1 v_{G1}^2}^{\,0}$$ perchè il CM_1 è sull'asse di rotazione $\Rightarrow$ $v_{G1} = 0$.

Le coordinate del CM_2 sono:



$$\begin{cases} x_{2G} = l/2 \sin\varphi \cos\theta \\ y_{2G} = l/2 \sin\varphi \sin\theta \\ z_{2G} = l + l/2 \cos\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{2G} = l/2(\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta) \\ \dot{y}_{2G} = l/2(\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta) \\ \dot{z}_{2G} = -l/2\,\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$$ $v_{2G}^2 = \dot{x}_{2G}^2 + \dot{y}_{2G}^2 + \dot{z}_{2G}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{2G}^2 = l^2/4\,(\dot\varphi^2\cos^2\varphi + \dot\vartheta^2\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\sin^2\varphi) =$

$= l^2/4\,(\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2\sin^2\varphi) \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M_2 v_{2G}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M_2 \frac{l^2}{4}(\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2\sin^2\varphi)$

dove:

I_2 è il momento d'inerzia del braccio ② rispetto ad A

$\omega_2 = |\vec{\omega}_2|$ è la velocità angolare del braccio ②

OSS: $\vec{\omega}_2 = \dot\varphi\,\hat{i} + \dot\vartheta\,\hat{k}$ perché ruota sia attorno all'asse z, sia rispetto a z $\Rightarrow |\vec{\omega}_2|^2 = \omega_2^2 = \dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} I_2 (\dot\varphi_2 + \dot\vartheta_2) + \frac{1}{2} M_2 \frac{l^2}{4}(\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2\sin^2\varphi)$

$$\left\{\begin{array}{l} x_{3G} = \left(\frac{l}{2}\cos\psi + l\right)\sin\varphi\cos\vartheta \\ y_{3G} = \left(l/2\cos\psi + l\right)\sin\varphi\sin\vartheta \\ z_{3G} = l + \left(l/2\cos\psi + l\right)\cos\varphi \end{array}\right. \Bigg\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot x_{3G} = -\frac{l}{2}\dot\psi\sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta + \\ \qquad + (l/2\cos\psi + l)(\dot\varphi\cos\varphi\cos\vartheta) - \dot\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta \\ \dot y_{3G} = \ldots \\ \dot z_{3G} = \ldots \end{array}\right. \qquad v_{3G}^2 = x_{3G}^2 + y_{3G}^2 + z_{3G}^2$$

anche in questo caso $\exists$ il contributo alla rotazione

$\vec{\omega}_3 = (\dot\varphi + \dot\psi)\,\hat{i} + \dot\vartheta\,\hat{k} \Rightarrow |\vec{\omega}_3|^2 = \omega_3^2 = (\dot\varphi + \dot\psi)^2 + \dot\vartheta^2$

$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} M_3 v_{3G}^2 = \frac{1}{2} I_3\left[(\dot\varphi + \dot\psi)^2 + \dot\vartheta^2\right] +$

$+ \frac{1}{2} M_3 v_{3G}^2 \Rightarrow T = T_1 + T_2 + T_3 \rightarrow$ energia cinetica totale

Per quanto riguarda l'energia potenziale il braccio ① che è fisso non dà contributo (cioè in $z = z_{1G}$ il valore del potenziale è posto uguale a zero). L'energia potenziale totale è: $U = M_2 g z_{3G} + M_3 g z_{3G} \Rightarrow L = T - U$ è lagrangiana del robot antropomorfo a 3 bracci.