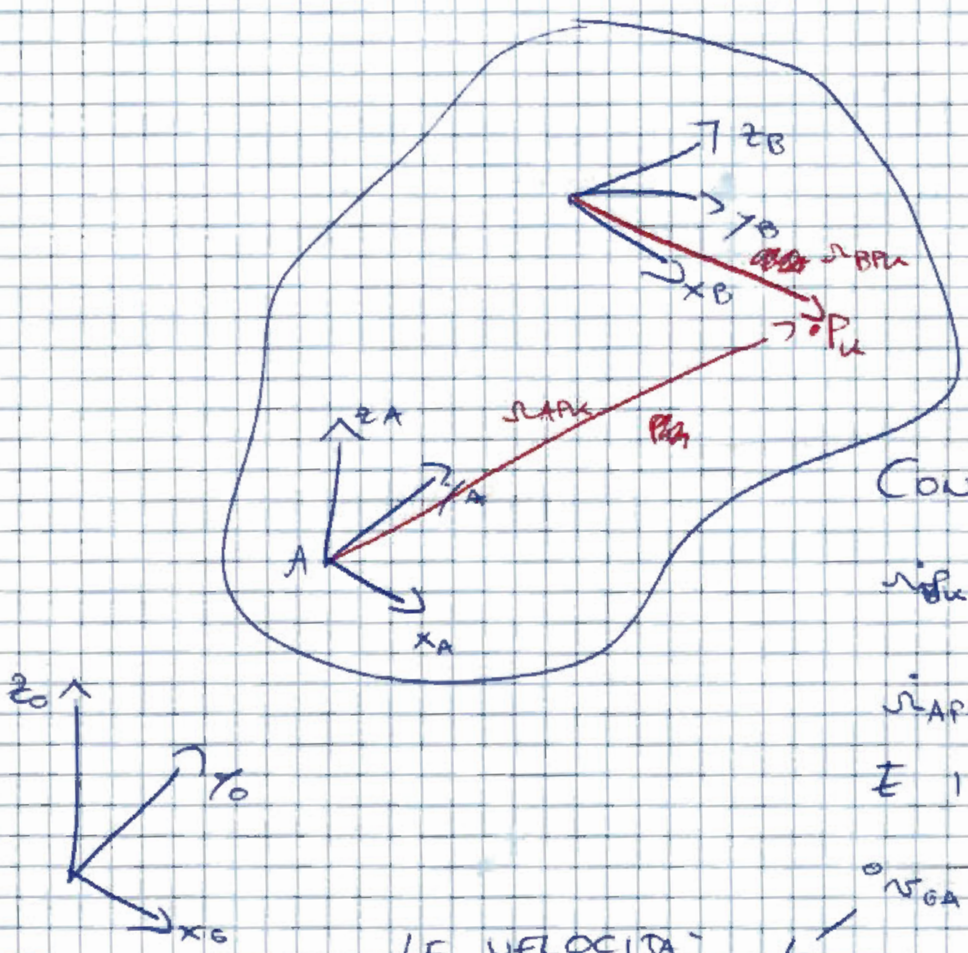
STATICA

Studente:
Mario Di Ferdinando

22/11/20

CONSIDERIAMO UN CORPO RIGIDO E DUE SIST. DI RIF. ADESI AD ESSO



SAPPIAMO CHE

$\omega_{0B} = \omega_{0A} = \omega_{0B}$

INOLTRE

$${}^0\dot{R}_A\,{}^0R_A^T = {}^0\dot{R}_B\,{}^0R_B^T$$

CONSIDERANDO P_k

$\dot{r}_{BP_k} = \omega_{0B} \times r_{BP_k}$

$\dot{r}_{AP_k} = \omega_{0A} \times r_{AP_k}$

E INOLTRE

$${}^0v_{0A} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{r}_{0A} \\ {}^0\omega_{0A} \end{bmatrix}$$

$${}^0v_{0B} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{r}_{0B} \\ {}^0\omega_{0B} \end{bmatrix}$$

LE VELOCITÀ SONO UGUALI SOLO CHE UNA È ORIENTATA RISP. AD A ED UNA RISP. A B

CONSIDERANDO INOLTRE

$\dot{r}_{0B} = \dot{r}_{0A} + \dot{r}_{AB} = \dot{r}_{0A} + \omega_{0A} \times r_{AB}$

IN COORDINATE

$${}^0\dot{r}_{0B} = {}^0\dot{r}_{0A} - \left[{}^0r_{AB}\times\right]{}^0\omega_{0A}$$

QUINDI

$${}^0v_{0B} = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & -\left[{}^0r_{AB}^{\times}\right] \\ \hline 0 & I_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^0\dot{r}_{0A} \\ {}^0\omega_{0A} \end{bmatrix}$$

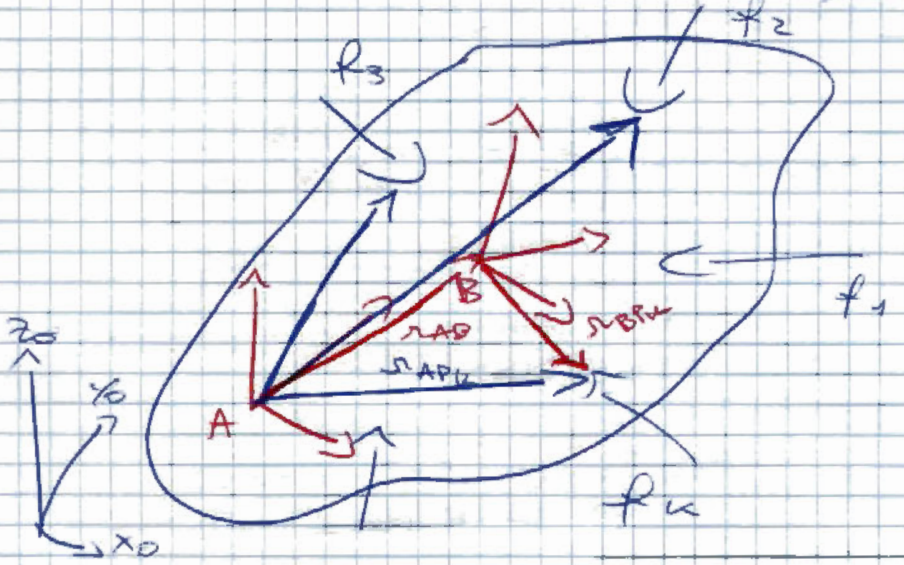
ANDIAMO ORA A CONSIDERARE

$$ {}^{A}\dot{v}_{OA} = \begin{bmatrix} {}^{A}\dot{s}_{OA} \\ {}^{A}\omega_{OA} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{A}v_{OB} = \begin{bmatrix} I_3 & -[{}^{A}s_{AB}\times] \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} {}^{A}v_{OA} $$

ORA IN B

$$ {}^{B}v_{OB} = \begin{bmatrix} {}^{B}R_A & 0 \\ 0 & {}^{B}R_A \end{bmatrix} {}^{A}v_{OB} = \begin{bmatrix} {}^{B}R_A & -{}^{B}R_A [{}^{A}s_{AB}\times] \\ 0 & {}^{B}R_A \end{bmatrix} {}^{A}v_{OA} = {}^{B}H_A(s_{AB}) $$

ORA CONSIDERIAMO ~~...~~ LE FORZE



→ SONO TANTE FORZE CHE AFFERRANO L'OGGETTO RIGIDO

CONSIDERIAMO COME PRIMO CASO SENZA FORZA PESO

(IMMAGINIAMO ASSENZA DI GRAVITÀ)

CALCOLIAMO LA RISULTANTE DELLE FORZE

$$ f_r = \sum_{k=1}^{N} f_k = 0 \Rightarrow \text{PERCHÉ IL CORPO SIA IN EQUILIBRIO} $$

MA ANCHE I MOMENTI DEVONO ESSERE NULLI

CALCOLIAMO ORA I MOMENTI RISP. AD ${}^{A}\Sigma$

$$ \underline{\mu_{A,k} = s_{AP_k} \times f_k} \Rightarrow \text{DIPENDE DAL PUNTO DI APPLICAZIONE} $$

QUINDI

$$ \mu_{r,A} = \sum_{k=1}^{N} s_{A,P_k} \times f_k = 0 \Rightarrow \text{EQUILIBRIO} $$

QUINDI CERCANDO UN SISTEMA DI FORZE GENERALIZZATE

$$ {}^{0}F_{r,A} = \begin{bmatrix} {}^{0}f_{r,A} \\ \hline {}^{0}\mu_{r,A} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{SARÀ COSÌ PER OGNI APPLICAZIONE} \Rightarrow {}^{0}F_{r,B} = \begin{bmatrix} {}^{0}f_{r,B} \\ \hline {}^{0}\mu_{r,B} \end{bmatrix} $$

SONO LE STESSE MA PRESI IN DIVERSI PUNTI

CON $\mu_{B,r} = \sum_{k=1}^{H} r$

CERCO QUINDI LA TRASFORMAZIONE DA A A B

$$ \mu_{r,A} = \sum_{k=1}^{H} r_{AP_k} \times f_k = \sum_{k=1}^{H} (r_{AB} + r_{BP_k}) \times f_k = $$

$$ = \sum_{k=1}^{H} r_{AB} \times f_k + \sum_{k=1}^{H} r_{BP_k} \times f_k = r_{AB} \times \left(\sum_{k=1}^{H} f_k \right) + \mu_{r,B} = $$

RISULTANTE GENERICA

PER COMODITÀ SCRIVO CHE È DI B MA È UGUALE

$$ = r_{AB} \times f_{r,B} + \mu_{r,B} \qquad \text{CON } f_{r,A} = f_{r,B} $$

QUINDI IN COORDINATE

$$ {}^{0}\mu_{r,A} = [r_{AB} \times]\, {}^{0}f_{r,B} + {}^{0}\mu_{r,B} \qquad \text{CON } {}^{0}f_{r,A} = f_{r,B} $$

QUINDI

$$ {}^{0}F_{r,A} = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & O_{3\times 3} \\ \hline [r_{AB} \times] & I_3 \end{array} \right] {}^{0}F_{r,B} $$

↳ SE NOTIAMO LE MATRICI DI VELOCITÀ CHE SONO SIMILI NOTIAMO CHE ${}^{0}F_{r,A} = {}^{0}H_0^{T}(r_{AB})\, {}^{0}F_{r,B}$

ESSENDO ANTISIMMETRICA => UN CAMBIO DI SEGNO CORRISPONDE ALLA TRASPOSIZIONE

QUINDI PER IL PASSAGGIO DA UN SISTEMA ALL'ALTRO.

$$ {}^{A}F_{s,A} = {}^{B}H_A{}^{T}(r_{AB})\,{}^{B}F_{s,B} \qquad \text{DOVE} \quad ({}^{B}H_A)^T = \begin{bmatrix} {}^{B}R_A & -{}^{B}R_A[{}^{A}r_{AB}\times] \\ 0 & {}^{B}R_A \end{bmatrix}^T = $$

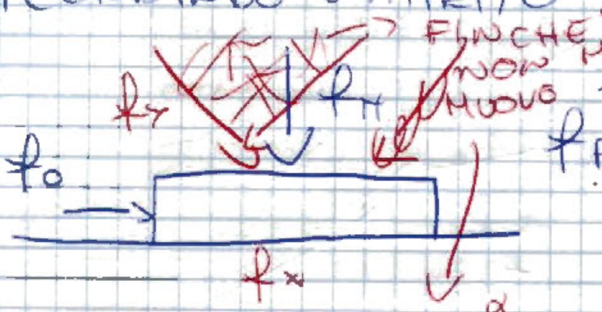
$$ = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}R_B & 0 \\ \hline [{}^{B}r_{AB}\times]\,{}^{A}R_B & {}^{A}R_B \end{array}\right] $$

$\Downarrow$ => POICHÉ TRASLA

SE

${}^{0}F_{s,A} = 0$ SONO IN EQUILIBRIO

RICORDANDO L'ATTRITO



=> FINCHÉ STO IN QUESTO CONO NON MI MUOVO

=> FORZA DI ATTRITO

$$ f_F = \alpha f_H $$

$\Downarrow$

PER MUOVERE L'OGGETTO DEVE ESSERE

$$ |f_0| > |f_F| $$

=> L'ATTRITO ENTRA IN GIOCO SOLO QUANDO STO PROVANDO A SPOSTARE L'OGGETTO

$$ |f_x| \overset{\alpha}{\leq} |f_y| $$

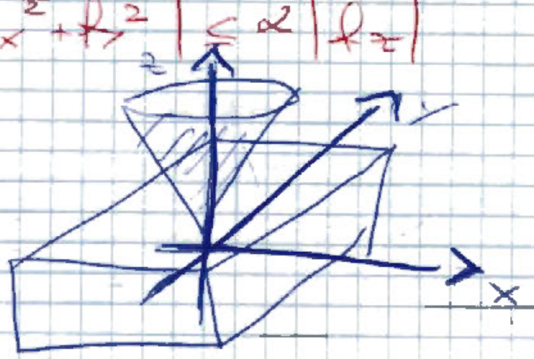
MI MUOVO SE ESCO FUORI DAL CONO INFATTI SARÀ

LI

$$ |f_x| \geq \alpha |f_y| \Rightarrow $$

IN TRE DIMENSIONI

$$ \left|\sqrt{f_x^2 + f_y^2}\right| \leq \alpha |f_z| $$



QUINDI TORNANDO AL ROBOT OTTENGO CHE POSSO APPLICARE UN MOMENTO μ_k OVVERO

FORZA f_k STRINGO

MOMENTO μ_k GIRO STRINGENDO

$\Downarrow$

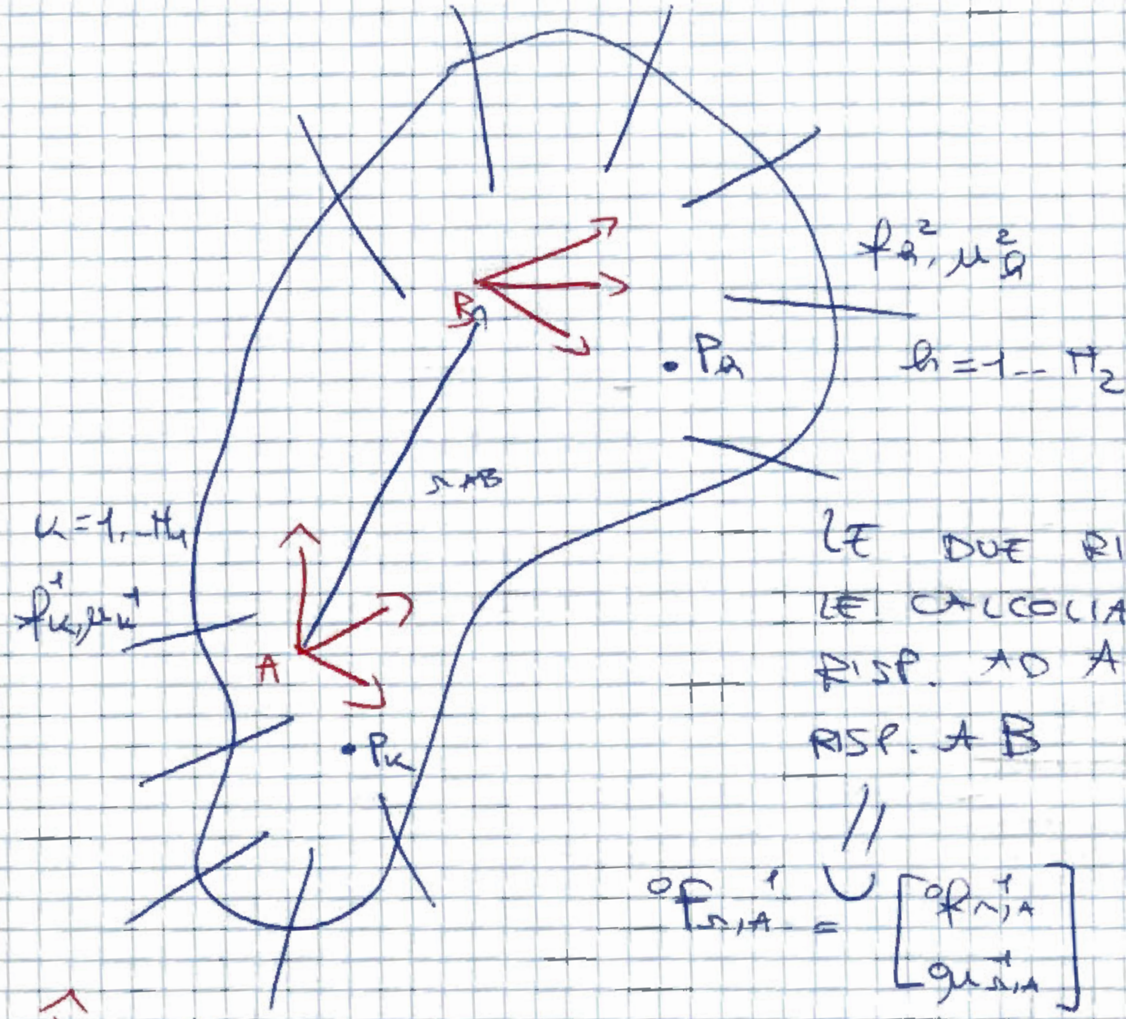
$$ f_s = \sum f_k \quad \text{COME PRIMA} $$

$$ \mu_{s,B} = \sum_{k=1}^{n} r_{B,p_k} \times f_k + \mu_k $$

$$ \mu_{s,A} = \sum_{k=1} r_{A,p_k} \times f_k + \mu_k $$

QUINDI NEGLI STESSI CALCOLI DI PRIMA BASTA AGGI[UNGERE]
I MOMENTI μ_k

SUPPONIAMO ORA DI AFFERRARE UN OGGETTO CON DU[E]



LE DUE RISULTANTI LE CALCOLIAMO UNA RISP. AD A ED UNA RISP. A B

$\Downarrow$

$${}^0F^1_{r,A} = \begin{bmatrix} {}^0f^1_{r,A} \\ {}^0\mu^1_{r,A} \end{bmatrix} \qquad {}^0F^2_{r,B} = \begin{bmatrix} {}^0f_r \\ {}^0\mu_r \end{bmatrix}$$

VEDIAMO L'EQUILIBRIO

$${}^0f^1_{r,A} + {}^0f^2_{r,B} = 0$$

$\Downarrow$

DOBBIAMO QUINDI AVERE IN TOTALE

DOBBIAMO ST[ARE] ATTENTI AI MOMENTI

$\Downarrow$

DEVONO AV[ERE] LO STESSO PUNTO DI AP[PLICAZIONE]

$\Leftarrow$

$${}^0F^1_{r,A} + {}^0F^2_{r,A} = 0$$

$\Downarrow$

$${}^0F^1_{r,A} + {}^0H_0^T(r_{AB})\,{}^0F^2_{r,B} = 0$$

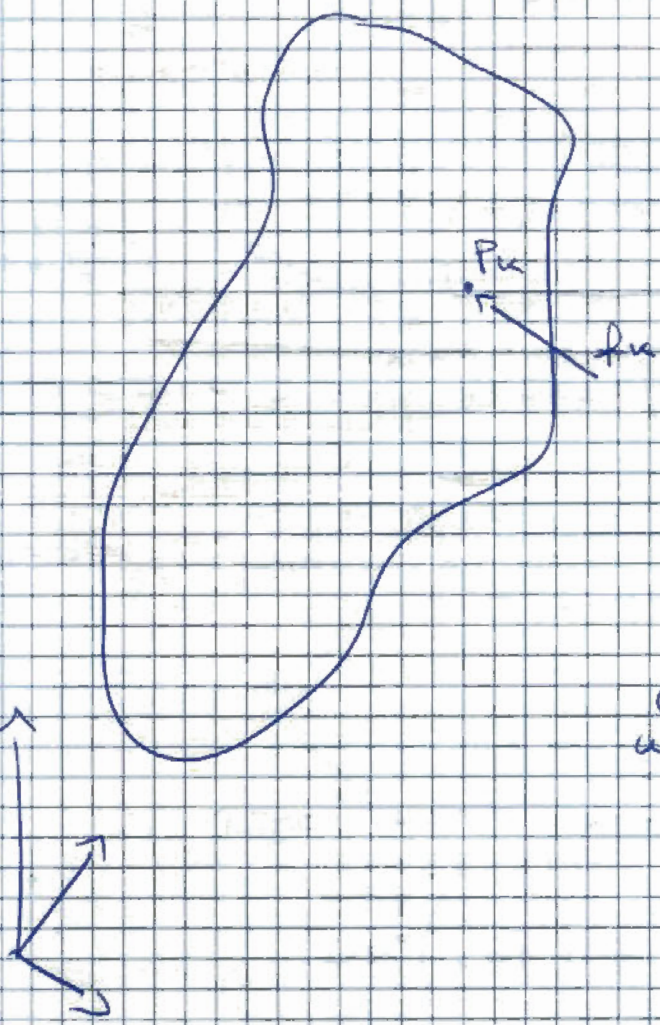
$$\boxed{{}^0F^1_{r,A} = -{}^0H_0^T(r_{AB})\,{}^0F^2_{r,B}}$$ EQUILIBRIO

SPOSTAMENTO VIRTUALE (EQUILIBRIO)

UN SIST. DI FORZE È IN EQUILIBRIO SE IL LAVORO CHE ESSO ESERCITA SU SPOST. AMMISSIBILI È SONO TALI CHE QUESTO SIST. FA UN LAVORO NULLO $\Rightarrow$ IN EQUILIBRIO

$\Downarrow$

VEDIAMO COME APPLICARLO



IL LAVORO È $\rightarrow$ LAVORO SPOST. TOTALE

$$\frac{dW_k}{dt} = f_k \frac{d r_{OP_k}}{dt}$$

$$\boxed{dW_k = f_k \, d r_{OP_k}}$$ LAVORO SPOST. INFINITESIMO

$\Downarrow$ TOTALE

$$dW = \sum_{k=1}^{n} f_k \, d r_{OP_k}$$

SE CALCOLO LA POTENZA

$$\sum_{k=1}^{N} P_k = \sum_{k=1}^{N} f_k \, \dot{r}_{OP_k} = \frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

$\rightarrow$ ENERGIA TOTALE

QUINDI RICONSIDERIAMO IL NOSTRO CASO

$\rightarrow$ LAVORO VIRTUALE

$$dW = \underbrace{\sum_{k=1}^{N_1} f_k^1 \, d r_{OP_k}}_{\text{SPOST. VIRT.}} + \sum_{h=1}^{N_2} f_h^2 \, d r_{OP_h} = 0$$

$\Rightarrow$ EQUILIBRIO

$\rightarrow$ POTENZA

$$P = \sum f_k^1 \, \underbrace{\dot{r}_{OP_k}}_{\text{UNA VEL.}} + \sum f_k^2 \, \dot{r}_{OP_h} = 0$$

CONVIENE ESSENDO UN CORPO RIGIDO RAGIONARE SULLA POTENZA

$$\dot{r}_{OP_k} = \dot{r}_{OA} + \omega_{OA} \times r_{AP_k}$$

$$\dot{r}_{OP_R} = \dot{r}_{OB} + \omega_{OB} \times r_{BP_R}$$

$$\Downarrow$$

SOSTITUISCO

→ COSTANTE => POSSIAMO CACCIARLO DALLA SOMMATORIA

$$P = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{H_1} f_k^1\right)}_{f^1_{r,A}} \dot{r}_{OA} + \underbrace{\sum_{k=1}^{H_1} f_k^1 \left(\omega_{OA} \times r_{AP_k}\right)}_{} + \sum_{h=1}^{H_2} f_k^2 \, \dot{r}_{OB} + \sum_{h=1}^{H_2} \dots$$

~~TRAN~~ SCRIVO QUESTO COME

$$\sum_{k=1}^{H_1} \omega_{OA} \times \underbrace{\left(r_{AP_k} \times f_k^1\right)}_{\mu^1_{r,A}}$$

QUINDI (CONSIDERIAMO PER IL MOMENTO CHE 2 NON C...

TANTO POI BASTA AGGIUNGERL...

$$P^1 = f^1_{r,A} \, \dot{r}_{OA} + \mu^1_{r,A} \, \omega_{OA}$$

CONSIDERANDO ODA 2

$$P^2 = f^2_{r,B} \, \dot{r}_{OB} + \mu^2_{r,B} \, \omega_{OB}$$

SCRIVENDO IN FORMA COMPATTA E IN COORD.

$$P^1 = \left({}^0 f^1_{r,A}\right)^T \dot{r}_{OA} + \left(\mu^1_{r,A}\right)^T \omega_{OA} = \left({}^0 F^1_{r,A}\right)^T {}^0 v_{OA}$$

$$P^2 = \left({}^0 f^2_{r,B}\right)^T \dot{r}_{OB} + \left(\mu^2_{r,B}\right)^T \omega_{OB} = \left({}^0 F^2_{r,B}\right)^T {}^0 v_{OB}$$

QUINDI PER L'EQUILIBRIO

$$P = P^1 + P^2 = \left({}^0 F^1_{r,A}\right)^T {}^0 v_{OA} + \left({}^0 F^2_{r,B}\right)^T {}^0 v_{OB}$$

RICORDANDO ${}^0 v_{OB} = {}^0 H_0 (r_{AB}) {}^0 v_{OA}$ QUINDI

$$P = \left({}^0 F^1_{r,A}\right)^T {}^0 v_{OA} + \left({}^0 F^2_{r,B}\right)^T {}^0 H_0 (r_{AB}) {}^0 v_{OA} = 0$$

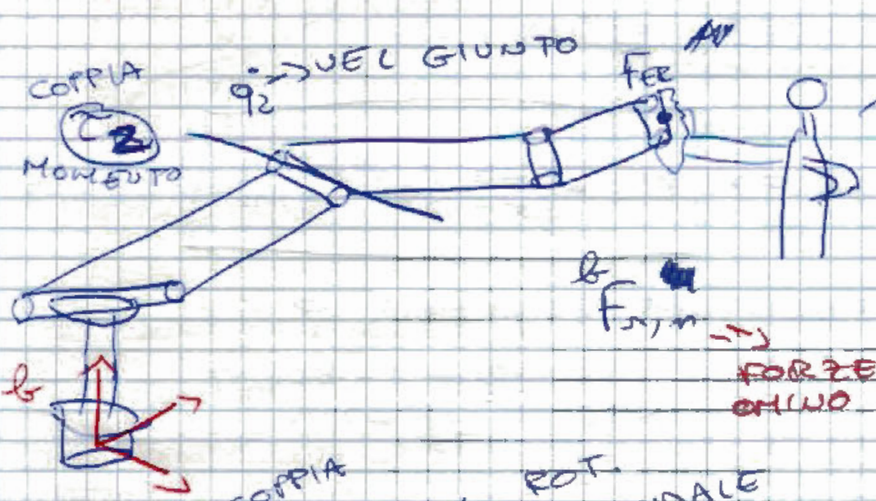
QUINDI

$$\left({}^{0}F_{s,A}^{1}\right)^{T} + \left({}^{0}F_{s,B}^{2}\right)^{T} {}^{0}H_{0}(r_{AB}) = 0$$

QUINDI TRASPONENDO

$$\boxed{{}^{0}F_{s,A}^{1} + {}^{0}H_{0}^{T}(r_{AB})\,{}^{0}F_{s,B}^{2} = 0}$$

CONSIDERIAMO ORA UN ROBOT



SIAMO NELLO SPAZIO

⇓

L'OMINO ESERCITA UNA FORZA OPPOSTA AL ROBOT

⇓

VEDIAMO LE FORZE SUI GIUNTI PER ~~AVERE~~ EQUILIBRIO

$$P_k = \tau_k \cdot \dot{q}_k$$

$\tau_k \to$ COPPIA / FORZA

$\dot{q}_k \to$ VEL. ROT. SE ROTOIDALE / VEL. DI TRASL. SE PRISMATICO

LA SOMMA DEI P_k

$$\sum P_k = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \, \dot{q}_k = \tau^T \dot{q} \Rightarrow$$

DOVE $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_k \\ \tau_n \end{bmatrix} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$

MENTRE LA POT. DELL'OMINO

$$P = {}^{b}F_{s,m}^{T}\,{}^{b}v_{om}$$

QUINDI PER L'EQUILIBRIO

$$\tau^T \dot{q} + {}^{b}F_{s,m}^{T}\,{}^{b}v_{om} = 0 \qquad \forall\, \dot{q}, {}^{b}v_{om}$$

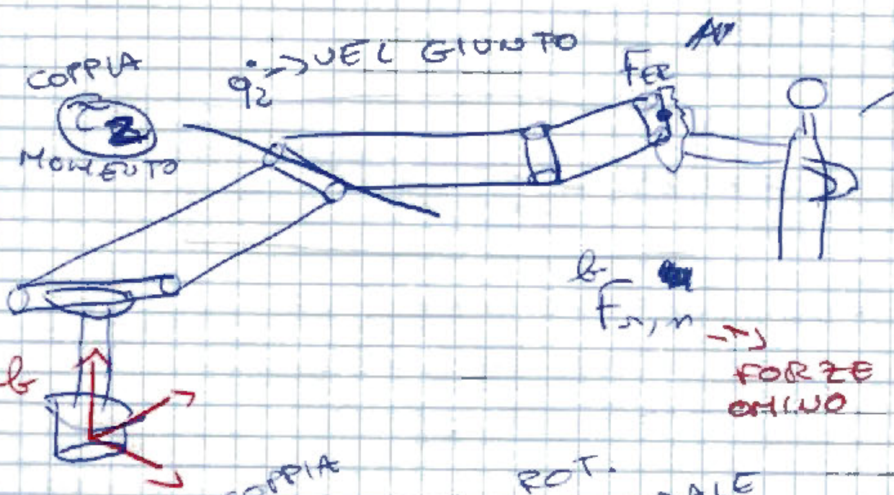
QUINDI

$$\left({}^0F^1_{s,A}\right)^T + \left({}^0F^2_{s,B}\right)^T\,{}^0H_0(r_{AB}) = 0$$

QUINDI TRASPONENDO

$$\boxed{{}^0F^1_{s,A} + {}^0H_0^T(r_{AB})\,{}^0F^2_{s,B} = 0}$$

CONSIDERIAMO ORA UN ROBOT



SIAMO NELLO SPAZIO
⇓
L'OMINO ESERCITA UNA FORZA OPPOSTA AL ROBOT
⇓
VEDIAMO LE FORZE SUI GIUNTI PER AVERE EQUILIBRIO

$$P_k = \underbrace{\tau_k}_{\substack{\to \text{COPPIA} \\ \text{FORZA}}} \cdot \underbrace{\dot q_k}_{\substack{\to \text{VEL. ROT. SE ROTOIDALE} \\ \text{VEL. DI TRASL. SE PRISMATICO}}}$$

LA SOMMA DEI P_k

$$\sum P_k = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \dot q_k = \tau^T \dot q \Rightarrow$$

DOVE $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_k \\ \tau_n \end{bmatrix}$ $\quad \dot q = \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \vdots \\ \dot q_n \end{bmatrix}$

MENTRE LA POT. DELL'OMINO

$$P = {}^bF^T_{s,m}\,{}^bv_{om}$$

QUINDI PER L'EQUILIBRIO

$$\tau^T \dot q + {}^bF^T_{s,m}\,{}^bv_{om} = 0 \qquad \forall\, \dot q,\ {}^bv_{om}$$

MA NOI SAPPIAMO CHE

$$ {}^{b}v_{om} = J(q)\dot{q} $$

QUINDI SOSTITUENDO

$$ \tau^T \dot{q} + {}^{b}F_{r,m}^{T} J(q)\dot{q} = 0 $$

$$ \left(\tau^T + {}^{b}F_{r,m}^{T} J(q)\right)\dot{q} = 0 \quad \forall \dot{q} \in \mathbb{R}^n $$

$$ \overset{\shortparallel}{0} $$

QUINDI DOVE NDO ESSERE SI HA CHE

$$ \tau + J^T(q)\,{}^{b}F_{r,m} = 0 \Rightarrow \boxed{\tau = -J^T(q)\,{}^{b}F_{r,m}} $$

DI SOLITO COME NOMENCLATURA UTILIZZIAMO

OVVERO FORZA ESTERNA APPLICATA AL ROBOT (SPINGE IL ROBOT)

$$ \underline{F_{ER}} = -\underline{F_{RE}} $$

FORZA CHE IL ROBOT FA ALL'ES

ENVIRONMENT ROBOT

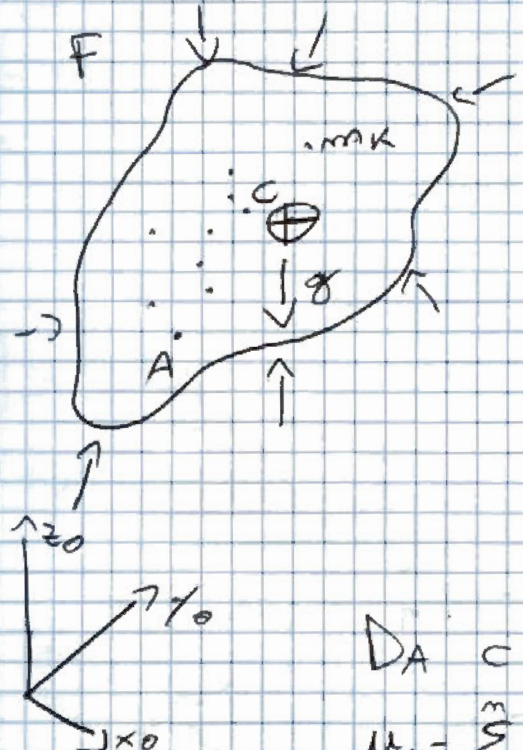
QUINDI

$$ \underset{\text{EQUILIBRIO}}{\tau = -J^T(q)\,{}^{b}F_{ER}} \quad \text{OPPURE} \quad \tau = J^T(q)\,{}^{b}F_{RE} $$

CAMBIO DI COORDINATE DA GIUNTO A CARTESIA

INTRODUCIAMO ORA LA FORZA PESO E PARLIAMO DEL CENTRO DI MASSA

23/11/2011



IL PESO DI UN CORPO E' DATO DALLA SOMMA DEI PESI DI TUTTI I SUOI PUNTI OVVERO

$$M = \sum_{k=1}^{m} m_k \Rightarrow f_k = m_k \vec{g} \quad r_{0k}$$

$$\vec{g}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} g \Rightarrow \text{AGISCE SOLO SU } z$$

QUINDI VOLENDO CALCOLARE LA FORZA DI GRAVITA'

$$f_g = \sum_{k=1}^{m} f_k = \sum_{k=1}^{m} m_k \vec{g} = M\vec{g}$$

DA CIO' OTTENIAMO CHE

$$\mu_A = \sum_{k=1}^{m} r_{AP_k} \times f_k = \sum_{k=1}^{m} m_k \cdot r_{AP_k} \times \vec{g} = \mu_{g,A}$$

QUINDI VOLENDOCI CALCOLARE LA MEDIA PESATA SI HA CHE

$$\boxed{r_{OC} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{m} m_k r_{OP_k}}$$

DA CIO' SE NE DEDUCE CHE CALCOLANDO IL MOMENTO SUL CENTRO DI MASSA C

$$\sum_{k=1}^{m} m_k r_{OC} = \sum_{k=1}^{m} m_k r_{OP_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} m_k (r_{OP_k} - r_{OC}) = 0$$

DA QUESTA CALCOLANDOCI LA RISULTANTE DEI MOMENTI E' NULLA

$$\Downarrow$$

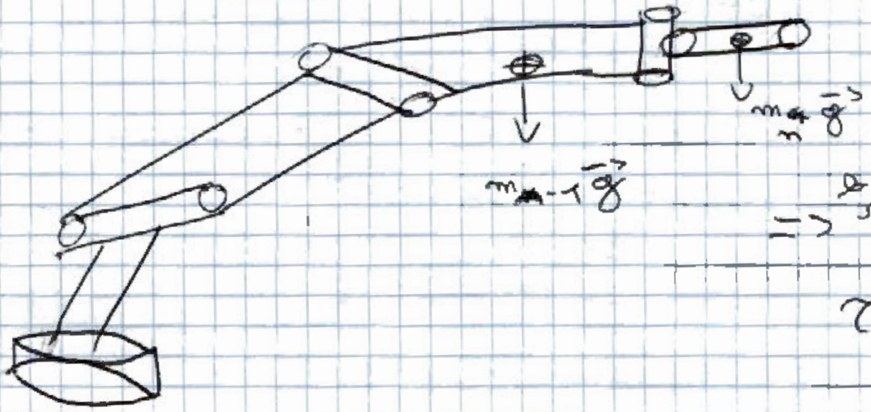
$$\mu_{g,C} = \sum_{k=1}^{m} r_{CP_k} \times (m_k \cdot \vec{g}) = \left(\sum_{k=1}^{m} m_k r_{CP_k} \right) \times \vec{g} = 0$$

NEL CASO DI UN ROBOT

$$^0F_{r,C} = \begin{bmatrix} M\vec{g} \\ 0 \end{bmatrix} = -{}^0F_{g,C} \Rightarrow {}^0F_{r,A} = -{}^0H_0^{T}(r_{AC})\,{}^0F_{g,C}$$

DA QUESTO

$$\tau = -J^T(q)\,{}^0F_{ER,m}$$

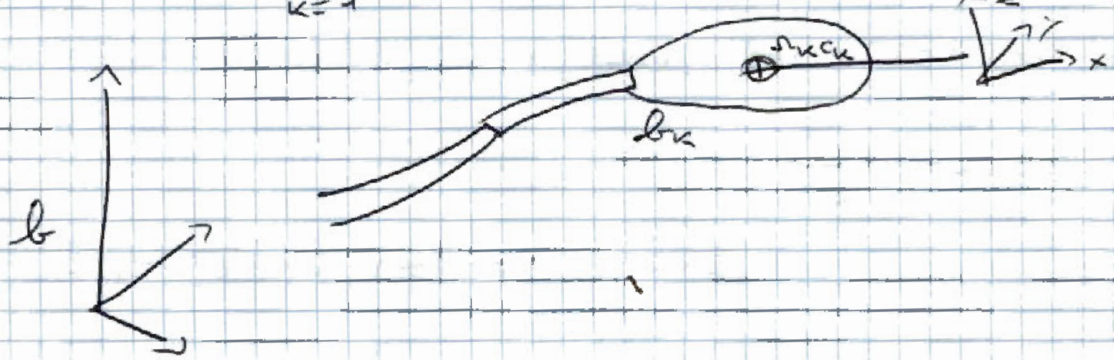


$$\Rightarrow {}^b v_{b,C_k} = J_{C_k}(q)\,\dot{q}$$

$$\tau = -J_{C_1}^T(q)\left(m_1\,{}^b\vec{g}\right) - J_{C_2}^T(q)\left(m_2\,{}^b\vec{g}\right) - J_{C_n}^T(q)\left(m_n\,{}^b\vec{g}\right)$$

DA QUI POSSO VEDERE COME E' IL CONTRIBUTO GRAVITAZIONALE SUI GIUNTI

$$g(q) = \tau = \sum_{k=1}^{n} g\, m_k\, J_{C_k}^T(q)\,{}^b z_b \Rightarrow {}^b g = -{}^b z_b\, g$$



ABBIAMO CHE IL CALCOLO TRA I GIUNTI E I BRACCI LO STESSO OVVERO

$$J_{C_k}(q) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \ast & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \quad 1 \quad\; k+1 \quad\quad n \end{array}$$

SE i È PRISMATICO $i \leq k$

LA COLONNA i-ESIMA DELLA MATRICE $J_{ck}(q)$

$$\left[J_{ck}(q)\right]_i = {}^{b}z_{i-1} = {}^{b}R_{i-1}(q)\,{}^{i-1}z_{i-1}$$

SE i È ROTOIDALE IL DISCORSO È PIÙ DIFFICILE CALCOLIAMO D'APPRIMA LO JACOBIANO DEL BRACCIO k-ESIMO

$$\left[J_{k}(q)\right]_i = \begin{bmatrix} {}^{b}z_{i-1} \times {}^{b}r_{i-1,k} \\ {}^{b}z_{i-1} \end{bmatrix}$$

~~GEOMETRICO~~

DA QUESTA POSSIAMO DIRE CHE

$$\dot{r}_{b,ck} = \dot{r}_{b,k} + \omega_{b,k} \times r_{k,ck} = \dot{r}_{b,k} - r_{k,ck} \times \omega_{b,k}$$

$$\Downarrow$$

$${}^{b}\dot{r}_{b,ck} = \left[I_3 \; \left[{}^{b}r_{k,ck}\right]\right] \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{r}_{b,k} \\ \omega_{b,k} \end{bmatrix}}_{{}^{b}v_{b,k}} \Rightarrow {}^{b}v_{bk} = \left[J_{k}(q)\right]_i \dot{q}_i$$

SE NE DEDUCE CHE UGUALIANDO

$${}^{b}\dot{r}_{b,ck} = \left[I_3 \quad -\left[{}^{b}r_{k,ck}\times\right]\right] \begin{bmatrix} {}^{b}z_{i-1} \times {}^{b}r_{i-1,k} \\ {}^{b}z_{i-1} \end{bmatrix} \dot{q}_i =$$

$$= {}^{b}\left(z_{i-1} \times r_{i-1,k}\right) - {}^{b}\left(r_{k,ck} \times z_{i-1}\right) = \left(z_{i-1} \times {}^{b}\left(r_{i-1,k} + r_{k,ck}\right)\right) =$$

$$= {}^{b}\left(z_{i-1} \times r_{i-1,ck}\right)$$

QUINDI

$g^T(q) = g \sum_{k=1}^{m} m_k\, {}^{b}z_b^T\, J_{ck}(q)$ E SAPENDO CHE $J_{ck}(q) = \frac{d}{dq}\, {}^{b}r_{b,ck}(q)$

SI HA CHE

SELEZIONA LA QUOTA DEL BARICENTRO

$$\underset{\text{ENER. POT. ...}}{g^T(q)} = \frac{d}{dq}\left(g \sum_{k=1}^{m} m_k \boxed{{}^{b}z_b^T\, {}^{b}r_{b,ck}(q)}\right)$$

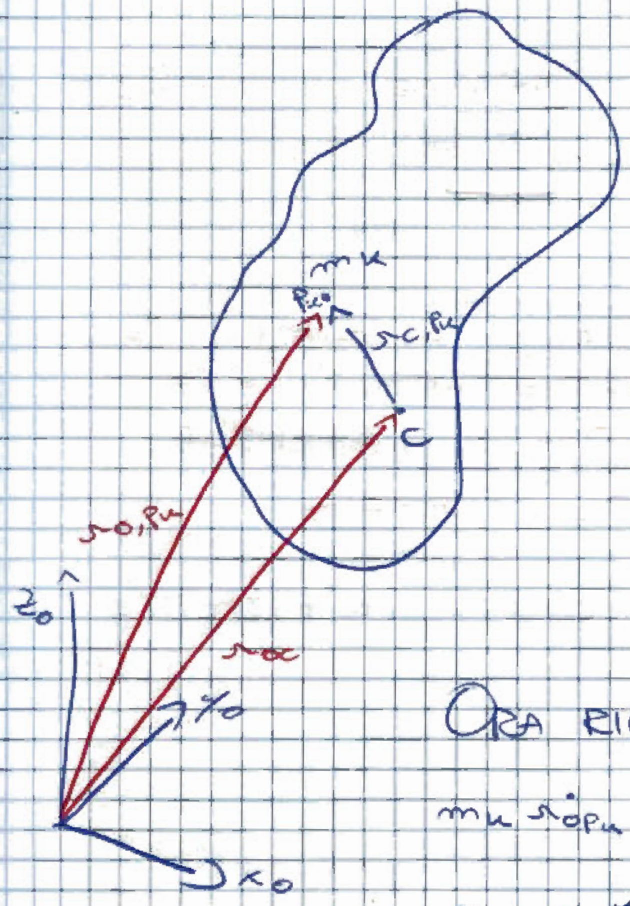
Q UIWD I

$$g^T(q) = \frac{d}{dq} U(q) \Rightarrow U(q) = \sum_{k=1}^{n} g m_k \left({}^{0}r_{0,c_k} \right)_z$$

MATRICE DI INERZIA DI UN CORPO RIGIDO

24/11/2011

- METODO DEL MOMENTO ANGOLARE



NOI SAPPIAMO CHE

$$r_{OC} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} m_k} \sum_{k=1}^{m} m_k \, r_{OP_k}$$

$$\Downarrow$$

$$r_{OC} \sum_{k=1}^{m} m_k = \sum_{k=1}^{m} m_k \, r_{OP_k}$$

QUINDI

$$\sum_{k=1}^{m} m_k (r_{OC} - r_{O,P_k}) = 0$$

ORA RICORDANDO CHE

$m_k \dot{r}_{OP_k} = P_k$ MOMENTO QUANTITA' DI MOTO

$r_{CP_k} \times P_k$ MOMENTO RISPETTO AL BARICENTRO

$$\boxed{M_C = \sum_{k=1}^{m} r_{CP_k} \times P_k = \sum_{k=1}^{m} m_k r_{CP_k} \times \dot{r}_{OP_k}}$$

MOMENTO ANGOLARE DI UN CORPO

SE SI PARLA DI UN CORPO RIGIDO LE VELOCITA' SONO LEGATE DALLA LEGGE

$$\dot{r}_{OP_k} = \dot{r}_{OC} + \omega \times r_{CP_k}$$

QUINDI

$$M_C = \sum_{k=1}^{m} m_k \left[r_{CP_k} \times \dot{r}_{OC} + r_{CP_k} \times (\omega \times r_{CP_k}) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(m_k r_{CP_k})}_{=0} \times \dot{r}_{OC} + \sum_{k=1}^{m} m_k r_{CP_k} \times (\omega \times r_{CP_k}) *$$

$$\Downarrow$$

$$* \; M_C(\omega) = \sum m_k r_{CP_k} \times (\omega \times r_{CP_k}) = I_C(\omega) \text{ INERZIA}$$

ORA RICORDANDO CHE

$$I(\omega_1+\omega_2)=I(\omega_1)+I(\omega_2)$$

$$I_c(\omega)=-\sum_{k=1}^{n} m_k r_{cP_k}\times(r_{cP_k}\times\omega)$$

IN UN SIST. DI RIF. SI HA CHE

MATRICE DI INE

$$^{o}M_c(\omega)=\left(-\sum_{k=1}^{n} m_k[^{o}r_{cP_k}\times][^{o}r_{cP_k}\times]\right)^{o}\omega=\boxed{^{o}I_c}\,^{o}\omega$$

QUINDI

$$^{o}I_c=\sum_{k=1}^{n} m_k[^{o}r_{cP_k}\times]^T[^{o}r_{cP_k}\times]\Rightarrow$$ DIPENDE ANCHE DAL PERCHE' SE IL CORPO RUOTA IL TERMINE $^{o}r_{cP_k}$ CAMBIA

PER OVVIARE A QUESTO PROBLEMA LA CALCOLIAMO RISPET AL CENTRO DI MASSA OVVERO

$$^{c}I_c=\sum_{k=1}^{n} m_k[^{c}r_{cP_k}\times]^T[^{c}r_{cP_k}\times]$$

- CASO DI DUE MASSE PUNTIFORMI

SI AVRA' CHE

$$[r_{cP_k}\times]r_{cP_k}=0 \Rightarrow \text{MATRICE SINGOLARE}$$

OVVERO SE LE MASSE PUNTIFORMI SONO ~~ALLINEATE~~ ALLIN ALLORA LA MATR. DI INERZIA E' SINGOLARE

$$r_{P_kP_j}=\alpha_{k,j}\,n \qquad r_{cP_k}=\alpha_k\,n$$

$$^{o}I_c\,^{o}n=0$$

LA MATRICE DI INERZIA E' DEFINITA POSITIVA

$$\omega M_c(\omega)=^{o}\omega^T\,^{o}I_c\,^{o}\omega>0 \quad \forall\,^{o}\omega\neq 0$$

E RICORDANDO CHE

$$a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$$

QUINDI

$$r \times (r \times \omega) = (r\,\omega)\, r - (r \cdot r)\,\omega = r(r\,\omega) - (r\,r)\,\omega$$

$$[{}^0 r \times]^2 \omega = {}^0 r\, {}^0 r^T\, {}^0\omega - {}^0 r^T\, {}^0 r\, {}^0\omega = [{}^0 r\, {}^0 r^T - {}^0 r^T\, {}^0 r\, I_3]\, {}^0\omega$$

$$[r \times]^2 = [{}^0 r\, {}^0 r^T - {}^0 r^T\, {}^0 r\, I_3] \Rightarrow [{}^0 r \times]^T [{}^0 r \times] = {}^0 r^T\, {}^0 r\, I_3 - {}^0 r\, {}^0 r^T \geq 0$$

QUINDI POSSIAMO DIRE CHE

$${}^0 I_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \left({}^0 r_{cP_k}^T\, {}^0 r_{cP_k}\, I_3 - {}^0 r_{cP_k}\, {}^0 r_{cP_k}^T \right)$$

CALCOLIAMOCELA ESTESA E SI HA CHE

$$[r \times]^T [r \times] = r^T r\, I_3 - r\, r^T = \begin{bmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_x r_y & r_x^2 + r_z^2 & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & r_x^2 + r_y^2 \end{bmatrix}$$

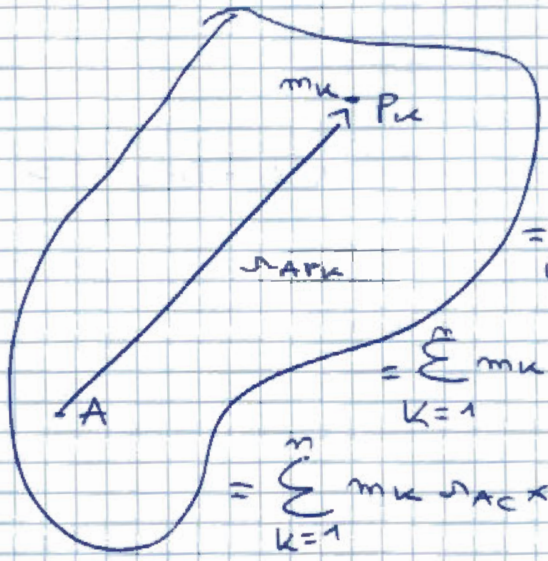
$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$I_c = \begin{bmatrix} \sum m_k (r_z^2 + r_y^2) & -\sum m_k r_x r_y & -\sum m_k r_x r_z \\ -\sum m_k r_x r_y & \sum m_k (r_x^2 + r_z^2) & -\sum m_k r_y r_z \\ -\sum m_k r_x r_z & -\sum m_k r_y r_z & \sum m_k (r_x^2 + r_y^2) \end{bmatrix}$$

QUINDI

$$I_c = \begin{bmatrix} \underbrace{\int_V (y^2+z^2)\, g(P)\, dV_P}_{\text{INERZIA } x} & -\int_V xy\, g(P)\, dV_P & -\int_V xz\, g(P)\, dV_P \\ -\int_V xy\, g(P)\, dV_P & \underbrace{\int_V (x^2+z^2)\, g(P)\, dV_P}_{\text{INERZIA } y} & -\int_V yz\, g(P)\, dV_P \\ -\int_V xz\, g(P)\, dV_P & -\int_V yz\, g(P)\, dV_P & \underbrace{\int (x^2+y^2)\, g(P)\, dV_P}_{\text{INERZIA } z} \end{bmatrix}$$

- MOMENTO ANGOLARE RISPETTO AD UN GENERICO PUN[TO] SENZA CONOSCERE IL BARICENTRO



$$M_A = \sum_{k=1}^{m} m_k\, r_{AP_k} \times \dot{r}_{OP_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} m_k\, r_{AP_k} \times \left(\dot{r}_{OC} + \omega \times r_{CP_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} m_k \left(r_{AC} + r_{CP_k} \right) \times \left(\dot{r}_{OC} + \omega \times r_{CP_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} m_k\, r_{AC} \times \dot{r}_{OC} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} m_k\, r_{AC} \times \left(\omega \times r_{CP_k} \right)}_{=0} +$$

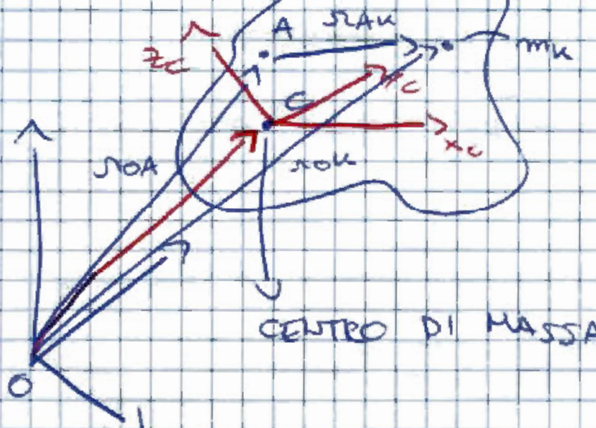
$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{m} m_k\, r_{CP_k}}_{=0} \times \dot{r}_{OC} + \sum_{k=1}^{m} m_k\, r_{CP_k} \times \left(\omega \times r_{CP_k} \right) =$$

$$= m_T\, r_{AC} \times \dot{r}_{OC} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} m_k\, r_{CP_k} \times \left(\omega \times r_{CP_k} \right)}_{M_C(\omega)}$$

$$M_A = r_{AC} \times \left(m_T\, \dot{r}_{OC} \right) + M_C(\omega)$$

6/12/2011

RIASSUMENDO



QUANTITÀ DI MOTO

$$P_k = m_k \dot{r}_{Ok}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = P_{TOT}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} r_{Ak} \times P_k = M_A}$$ MOMENTO ANGOLARE

CENTRO DI MASSA $r_{OC} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k r_{Ok}$

$\hookrightarrow m = \sum_{k=1}^{n} m_k$

QUINDI

$$\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) r_{OC} = \sum_{k=1}^{n} m_k r_{Ok}$$

ORA CONSIDERANDO LE VELOCITÀ

$$\dot{r}_{Ok} = \dot{r}_{OC} + \omega \times r_{Ck}$$

IL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO SARÀ

$$M_C(\omega) = -\sum_{k=1}^{n} m_k r_{Ck} \times (r_{Ck} \times \omega)$$

È NEGATIVO POICHÈ NEI CALCOLI È STATO COMMUTATO $\omega \times r_{Ck}$

OVVERO SI HA

$$M_C = \boxed{I(\omega)}$$ => DA UNA MATRICE DETTA MATRICE DI INERZIA

→ CI RESTITUISCE UN VETTORE

QUINDI RICALCOLANDO IL MOMENTO ANGOLARE

$$M_A = M_C(\omega) + r_{AC} \times (m \cdot \dot{r}_{OC}) = I(\omega) + r_{AC} \times (m \cdot \dot{r}_{OC})$$

CONOSCENDO MASSA, MATRICE DI INERZIA E BARICENTRO POSSO VEDERE COME REAGISCE IL MIO CORPO RIGIDO A STIMOLI ESTERNI

ANDANDO A RIVEDERE IL NOSTRO OPERATORE DI INERZI[A]
CI RICAVIAMO LA MATRICE DI INERZIA

$$I(\omega) = -\sum_{k=1}^{m} m_k r_{ck} \times (r_{ck} \times \omega) = -\sum_{k=1}^{m} m_k (r_{ck}(r_{ck}\omega) - (r_{ck} r_c$$

RAPPRESENTIAMOLO CON UN OPERATORE MATRICIALE IN UN SIST. DI COORDINATE

$$^{o}I(\omega) = -\sum_{k=1} [^{o}r_{ck}\times][^{o}r_{ck}\times]\,^{o}\omega =$$

RICORDANDO CH[E]

$$a\times(b\times c) = (ac)b - (ab$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} m_k [^{o}r_{ck}\times]^T [^{o}r_{ck}\times]\right)}_{I}\,^{o}\omega$$

MATRICE DI INERZIA

QUINDI VUOL DIRE

$$^{o}M_c = {}^{o}I\,^{o}\omega$$

MA NOI INTERESSA IN COORDINATE C QUINDI

$$^{c}M_c = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} m_k [^{c}r_{ck}\times]^T [^{c}r_{ck}\times]\right)}\,^{c}\omega$$

$$\boxed{^{c}M_c(t) = {}^{c}I\,^{c}\omega(t)}$$

NEL TEMPO

IL CAMBIO DI COORDINATE LO CALCOLIAMO COME

$$^{o}M_c = {}^{o}R_c\,^{c}M_c = {}^{o}R_c\,I\,^{c}\omega$$

ESSENDO

$$^{c}\omega = {}^{o}R_c^{T}\,^{o}\omega$$

UN SISTEMA ATTACCATO AD UN CORPO RIGIDO FERMO E' INERZIALE SE SI MUOVE NON LO E' PIU'

QUINDI

LA MATR. DI INERZIA NON DIPENDE DAL TEMPO

$$^{o}M_c = \underbrace{{}^{o}R_c\,^{c}I\,^{o}R_c^{T}}_{^{o}I}\,^{o}\omega$$

DIVENE DIPENDENTE DAL TEMPO (IL CORPO SI MUOVE) QUANDO MOLTIPLICHIAMO PER R (CAMBIO DI COORDINATE) E QUINDI HA SENSO

RICONSIDERIAMO ORA L'ENERGIA CINETICA

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k \| \dot{r}_{0k} \|^2$$

RICORDANDO CHE

$$\dot{r}_{0k} = \dot{r}_{0c} + \omega \times r_{ck}$$

QUINDI

$$T = \frac{1}{2} m \| \dot{r}_{0c} \|^2 + \frac{1}{2} \omega \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k r_{ck} \times (r_{ck} \times \omega)}_{I(\omega)} =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{r}_{0c} (m \cdot \dot{r}_{0c})$$

↳ TUTTE LE MASSE CONCENTRATE NEL BARICENTRO E LA VELOCITÀ È CONSIDERATA QUELLA DEL BARICENTRO

QUINDI

ENERGIA POTENZIALE ~~ENERGIA POTENZIALE~~?

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{r}_{0c} P_{TOT}}_{\text{TRASLAZIONE}} + \underbrace{\frac{1}{2} \omega I(\omega)}_{\text{ROTAZIONE}}$$

MA LA POSSO SCRIVERE ANCHE IN COORDINATE

$$T = \frac{1}{2} m \, {}^0\dot{r}_{0c}^T \, {}^0\dot{r}_{0c} + \frac{1}{2} {}^0\omega^T \, {}^0I_c \, {}^0\omega = \frac{1}{2} \left[{}^0\dot{r}_{0c} \; {}^0\omega \right] \begin{bmatrix} m I_3 & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & {}^0 I_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\dot{r}_{0c} \\ {}^0\omega \end{bmatrix}$$

IDENTITÀ

INERZIA

⇓ DIVENTA UNA FORMA QUADRATICA

ORA RICORDANDO CHE

$${}^0I_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[{}^0 r_{ck} \times \right]^T \left[{}^0 r_{ck} \right]$$

↳ COME NOTIAMO ESSA È SEMIDEFINITA POSITIVA

SI HA SOLO SE TUTTI GLI r_{ck} SONO ALLINEATI (PARALLELI AD UN VETTORE DATO)

QUINDI IL MOMENTO ANGOLARE RISULTA NULLA SE ω È LA ROTAZIONE ATTORNO AL FILO DOVE SONO DISPOSTE ~~MM~~ ALLINEATI

⇓

PER QUESTO È SEMIDEFINITA ~~DEL~~ POSITIVA

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE ORA TUTTA LA DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

SE HO ~~[illegible]~~ FORZE f_k APPLICATA SUL CORPO AVRÒ CHE LE QUANTITÀ DI MOTO CAMBIANO

$$\frac{dP_k}{dt} = f_k$$

QUINDI

$$\frac{d\sum_{k=1}^{n} P_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dP_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

QUINDI

$$\frac{dP_{TOT}}{dt} = \frac{d(m \cdot \dot{r}_{oc})}{dt} = \boxed{f_e}$$ FORZA ESTERNA TOTALE

INFATTI RIPRENDENDO NOTIAMO CHE SI RITORNA A NEWTON

$$\frac{dP_k}{dt} = f_k \Rightarrow m_k \frac{d\dot{r}_{ok}}{dt} = f_k$$

$$\boxed{m \cdot a = F}$$ NEWTON

QUINDI

$$\boxed{m\ddot{r}_{oc} = f_{e}} \Rightarrow \ddot{r}_{oc} = \frac{1}{m} f_e(t)$$

QUINDI CONOSCENDO LO STATO INIZIALE $r_{oc}(0)$, $\dot{r}_{oc}(0)$ POSSO CONSIDERANDO LA FORZA APPLICATA CONOSCERE TUTTO IL TRAGITTO CHE COMPIE

$$\boxed{r_{OC}(t) \quad \ddot{r}_{OC}(t)}$$

MA A NOI CI INTERESSA ANCHE LA PARTE ANGOLARE

POSSIAMO SCRIVERE LA QUANTITA' DI MOTO ED I MOMENTI ANGOLARI COME

DA NEWTON

$$\boxed{\frac{dP_{TOT}}{dt} = f_R} \Longrightarrow \boxed{\frac{dM_C}{dt} = \mu_R}$$

NEWTON - EULERO

DINAMICA BARICENTRO

EULERO

DINAMICA ANGOLARE

$$\frac{d\sum_{k=1}^{m} r_{ck} \times P_k}{dt} = \boxed{\sum_{k=1}^{m} r_{ck} \times f_k} = \mu_R$$

MOMENTI DELLE FORZE RISPETTO AL BARICENTRO

RISULTANTE DEI → MOMENTI ~~...~~ DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AL CENTRO DI MASSA

ANDIAMO QUINDI A SVILUPPARLA

CONSIDERANDO CHE

VELOCITA' ANGOLARE ω

$$\frac{dI(\omega)}{dt} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} m_k r_{ck} \times (r_{ck} \times \dot{\omega})}_{I(\dot{\omega})} + \sum_{k=1}^{m} m_k \dot{r}_{ck} \times (\dot{r}_{ck} \times \omega) + m_k r_{ck} \times (\dot{r}_{ck} \times \omega)$$

INERZIA

→ ACCELERAZIONE ANGOLARE $\dot{\omega}$

CONSIDERANDO $\dot{r}_{ck} = \omega \times r_{ck}$ E SOSTITUENDO

$$\boxed{\frac{dI(\omega)}{dt} = I(\dot{\omega}) + \omega \times I(\omega) = \mu_R}$$

CONSIDERANDO IL CALCOLO PIU' IN DETTAGLIO IN UN SISTEMA DI COORDINATE INERZIALI

$${}^{0}M_c = {}^{0}I_c\, {}^{0}\omega = \underbrace{{}^{0}R_c\, {}^{c}I_c\, {}^{0}R_c^{T}}_{{}^{0}I}\, {}^{0}\omega$$

RICORDANDO CHE ${}^{0}\dot{R}_c\, {}^{0}R_c^{T} = [{}^{0}\omega_{0c} \times]$ PRODOTTO VETTORE CON VELOCITA' ANGOLARE

ANDIAMO QUINDI A DERIVARE

$$\frac{d\,{}^0M_c}{dt} = {}^0\dot{R}_c\,{}^cI_0\,{}^0R_c^T\,{}^0\omega + {}^0R_c\,{}^cI_0\,{}^0\dot{R}_c^T\,{}^0\omega + {}^0I_c\,{}^0\dot{\omega} =$$

$$= \underbrace{{}^0\dot{R}_c\,{}^0R_c^T}_{[{}^0\omega\times]}\underbrace{{}^0R_c\,{}^cI_0\,{}^0R_c^T}_{{}^0I_c}\,{}^0\omega + \underbrace{{}^0R_c\,{}^cI_c\,{}^0R_c^T}_{{}^0I}\underbrace{{}^0R_c\,{}^0\dot{R}_c^T}_{[{}^0\omega\times]}\,{}^0\omega = 0$$

QUINDI

$$\boxed{\frac{d\,{}^0M_c}{dt} = {}^0I_c\,{}^0\dot{\omega} + [{}^0\omega\times]\,{}^0I_c\,{}^0\omega = {}^0\mu_R}$$

SCRIVENDO MEGLIO NEWTON

RICORDANDO CHE

$${}^0\ddot{x} = \frac{1}{m}\,{}^0f_R \longrightarrow$$

SE UN CORPO SI MUOVE IL BARICE[NTRO] VA DI MOTO RETT. UN[IF.] NON C'È ACCELERA[ZIONE] (OVVIAMENTE SE NON SONO FORZE ESTER[NE]) PER $f_e = 0$ MA

DA QUI QUINDI RISCRIVIAMO

$${}^0\dot{\omega} = {}^0I_c^{-1}\left(-[{}^0\omega\times]\,{}^0I_c\,{}^0\omega + {}^0\mu_R\right)$$

OVVERO

$${}^0\dot{\omega} = {}^0I_c^{-1}\left(-[{}^0\omega\times]\,{}^0I_c\,{}^0\omega\right) \Longleftarrow$$

L'ACCELERAZIONE ANGOLARE SE $\mu_R = 0$ VALE ZERO MA C'È UNA PICCOLA ACCE[LERAZIONE]

UNA VOLTA DERIVATO POSSIAMO SCEGLIERE ORA DI SCRIVERLO ANCHE IN COORDINATE NON INERZIALE

$${}^c\dot{\omega} = {}^cI_c^{-1}\left(-[{}^c\omega\times]\,{}^cI_c\,{}^c\omega\right)$$

↳ DIPENDE DALLA DIREZIONE

- SE LA VEL. È LUNGO GLI AUTOVETTORI DELLA MATR. IN. LA VELOCITÀ ANG. NON CAMBIA
- SE LA VEL. NON È LUNGO " " CAMBIA

LA MATRICE DI INERZIA PUO' ESSERE SCOMPOSTO NEI TRE ASSI PRINCIPALI (I TRE AUTOVETTORI)

RICORDANDO CHE

$Q = Q^T > 0$ E SAPENDO $\lambda_i > 0$ $v_i^T = u_i$

SIMM. E ~~[illegible]~~ POS. DEF.

$Q u_i = \lambda_i u_i \Rightarrow u_i^T Q^T = \lambda_i u_i^T$

QUINDI

$u_j^T u_i = 0$ SE $\lambda_j \neq \lambda_i$

VIENE FUORI DA QUESTO

CONSIDERANDO AUTOVETTORI DI NORMA UNITARIA OVVERO

$\|u_i\| = 1 \Rightarrow u_i^T u_i = 1$

QUINDI

$U = [u_1, \dots, u_m]$

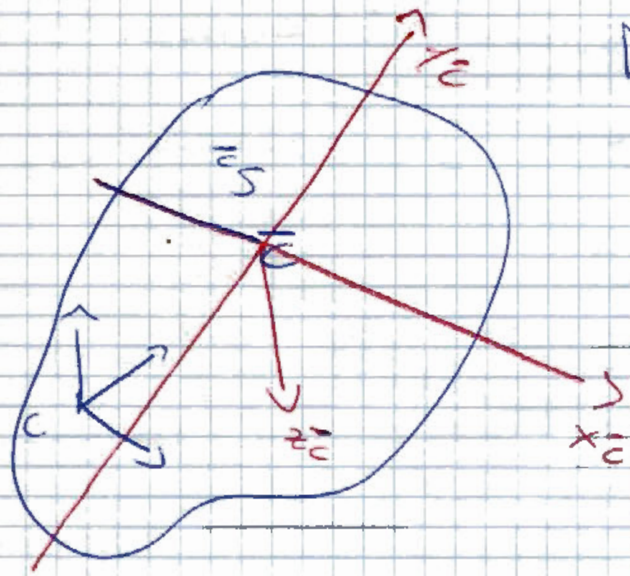
$$\boxed{U^T U = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}$$

POSSIAMO DIAGONALIZZARE Q CON UNA MATRICE ORTONORMALE

$Q = U \Lambda U^T$

$\hookrightarrow$ OGNI u E' L'ASSE PRINCIPALE

RITORNANDO AL NOSTRO PROBLEMA



DALLA MATR. DI INERZIA TROVO

$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$

$U = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$x \quad y \quad z$

$x_c \to \frac{1}{\lambda_1}$

CONSIDERANDO ORA ${}^c\omega = u_1$ SI HA CHE

$T = \frac{1}{2} {}^c\omega^T \, {}^cI \, {}^c\omega = \frac{1}{2}\lambda_1$

SE ${}^c\omega = u_2$

$T = \frac{1}{2}\lambda_2$

QUINDI POTREI SCRIVERE IL BRACCIO DI UN ROBOT CON TRE INERZIE

$$ {}^{c}I_{c} = \begin{bmatrix} {}^{c}x_{\bar{c}} & {}^{c}y_{\bar{c}} & {}^{c}z_{\bar{c}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{bmatrix}}_{= {}^{\bar{c}}I_{\bar{c}}} \begin{bmatrix} {}^{c}x_{\bar{c}}^{T} \\ {}^{c}y_{\bar{c}}^{T} \\ {}^{c}z_{\bar{c}}^{T} \end{bmatrix} $$

6 NUMERI

POICHÈ PRIMA LO TROVIAMO SU UN GENERICO C E POI LO CERCHIAMO IN $\bar{c}$

A NOI INTERESSA ANCHE ${}^{0}R_{c}(t)$ OPPURE Θ

RICORDANDO CHE

$$ G(\Theta)\,\dot{\Theta} = {}^{0}\omega \qquad \text{OPPURE} \qquad \bar{G}(\Theta)\,\dot{\Theta} = {}^{c}\omega $$

RICAVANDO

$$ \dot{\Theta} = \bar{G}^{-1}(\Theta)\,{}^{c}\omega $$

DOBBIAMO INTEGRARE E L'ESPRESSIONE ${}^{c}\dot{\omega}$ QUINDI

$$ {}^{c}\dot{\omega} = -{}^{c}I_{c}^{-1}\left[{}^{c}\omega\times\right]{}^{c}I_{c}\,{}^{c}\omega + {}^{c}I_{c}^{-1}\,{}^{c}\mu_{e} $$

$$ \dot{\Theta} = \bar{G}^{-1}(\Theta)\,{}^{c}\omega $$

$$ \boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t))} \qquad x = \begin{bmatrix} {}^{c}\omega \\ \Theta \end{bmatrix} $$

INTEGRAZIONE

RICORDANDO CHE

$$ {}^{0}\dot{R}_{c}\,{}^{0}R_{c}^{T} = \left[{}^{0}\omega\times\right] $$

$$ {}^{0}R_{c}^{T}\left[{}^{0}\omega\times\right]{}^{0}R_{c} = \left[{}^{c}\omega\times\right] $$

QUINDI

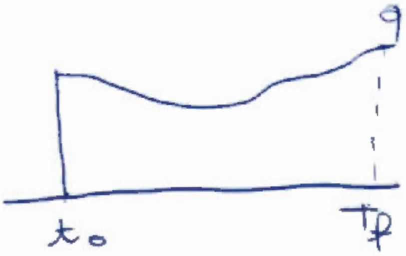
$${}^{0}R_{c}^{T}\,{}^{0}\dot{R}_{c}\,{}^{0}R_{c}^{T}\,{}^{0}R_{c} = [{}^{c}\omega\times] \Rightarrow {}^{0}R_{c}^{T}\,{}^{0}\dot{R}_{c} = [{}^{c}\omega\times]$$

DINAMICA DIRETTA DI UN ROBOT

LEZIONE 2/12/2011

A PARTIRE DA COPPIE τ_A (ATTUATORI) DOBBIAMO CALCOLARE $q(t)$ CONOSCENDO $q(t_0)$ E $\dot{q}(t_0)$

1



$\tau(t) \quad t \in [t_0, T_f]$

OVVERO DOBBIAMO CALCOLARE LE TRAIETTORIE DATE LE CAUSE

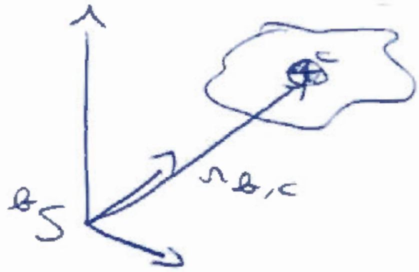
DINAMICA INVERSA

DATA UNA TRAIETTORIA $q_d(t)$ CERCHIAMO GLI ATTUATORI τ_A

INIZIAMO CON LA => **DINAMICA** DIRETTA

~~Dunque~~ NOI SAPPIAMO CHE

$$\begin{cases} \ddot{r}_{b,c} = \frac{1}{m} f_R \\ \dot{\omega} = I_c^{-1}(-\omega \times I_c(\omega) + \mu_R) \end{cases}$$



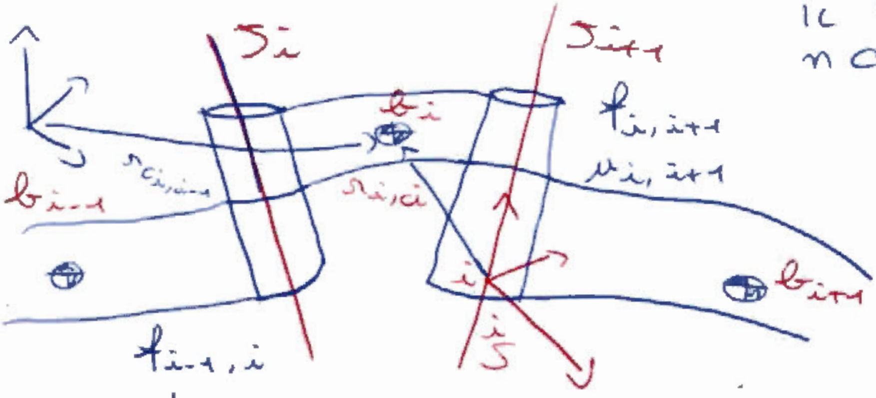
LE RISCRIVIAMO COME

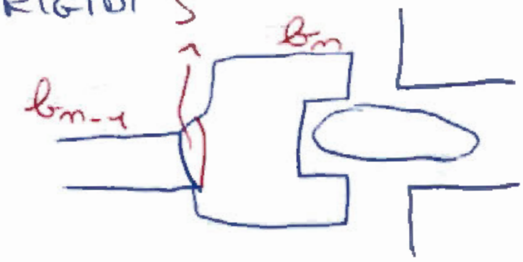
$$\begin{cases} m\, \ddot{r}_{b,c} = f_R \\ I_c(\dot{\omega}) + \omega \times I(\omega) = \mu_R \end{cases}$$

=> DOBBIAMO SCRIVERNE UNA PER OGNI BRACCIO DEL ROBOT

⇓

IL ROBOT HA n CORPI RIGIDI ^{S}





$f_{i-1,i}$

↳ LA FORZA CHE $i-1$ ESERCITA SU i

$$F_{ER} = \begin{bmatrix} f_{ER} \\ \hline \mu_{ER} \end{bmatrix}$$

$\mu_{i-1,i}$

↳ MOMENTO CHE $i-1$ ESERCITA SU i

SCRIVIAMO QUINDI LE NOSTRE FORMULE (EULERO) PER IL BRACCIO i

→ AZIONE → REAZIONE

$$\begin{cases} m_i \ddot{r}_{B,c_i} = f_{i-1,i} - f_{i,i+1} + m_i g \\ I_{c_i}(\dot{\omega}_{B,i}) + \omega_{B,i} \times I_i(\omega_{B,i}) = \mu_{i-1,i} - \mu_{i,i+1} + r_{c_i,i-1} \times f_{i-1,i} - r_{c_i,i} \times f_{i,i+1} \end{cases}$$

BILANCIO FORZE E COPPIE PER IL BRACCIO_i => SI FA TUTTO PER $i = 1, \dots, n$

ARRIVATI ALL'n PERO' NON C'E' UN $n+1$ => SI CONSIDERA L'ENVIRONMENT COME $n+1$

$$+\begin{bmatrix} f_{n,n+1} \\ \mu_{n,n+1} \end{bmatrix} = -F_{ER}$$

VEDIAMO => LA DINAMICA INVERSA

PONIAMO DI CONOSCERE $\ddot{r}_{B,c_i}$, $\dot{\omega}_{B,i}$ ED $\omega_{B,i}$ OVVERO CONOSCIAMO TUTTI I TERMINI A SINISTRA

IPOTIZZANDO CHE E' NOTO $\begin{bmatrix} f_{i,i+1} \\ \mu_{i,i+1} \end{bmatrix}$ POSSO CALCOLARE QUELLA DEL BRACCIO PRIMA

$$f_{i-1,i} = m_i \ddot{r}_{B,c_i} + f_{i,i+1} - m_i g$$

$$\mu_{i-1,i} = I_{c_i}(\dot{\omega}_i) + \omega_i \times I_{c_i}(\omega_i) + \mu_{i,i+1} - r_{c_i,i-1} \times f_{i-1,i} + r_{c_i,i} \times f_{i,i+1}$$

DI SOLITO SI PRENDE F_{ER} COME NOTA ⇓ LA SI MISURA CON DEI SENSORI

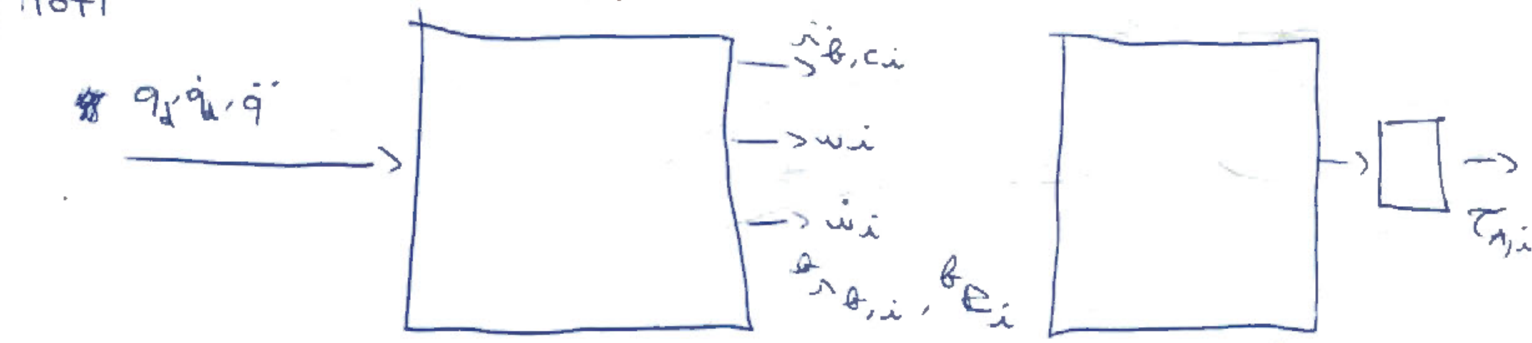
PARTIAMO DA $\begin{pmatrix} f_{n,n+1} \\ \mu_{n,n+1} \end{pmatrix}$ E SI ARRIVA AD $\begin{pmatrix} f_{0,1} \\ \mu_{0,1} \end{pmatrix}$

ANALIZZIAMO IL GIUNTO i OVVERO J_i E SI HA $\begin{pmatrix} f_{i-1,i} \\ \mu_{i-1,i} \end{pmatrix}$

$$\tau_{A,i} = \begin{cases} \mu_{i-1,i}\, z_{i-1} & \text{ROTOIDALE} \\ f_{i-1,i}\, z_{i-1} & \text{PRISMATICO} \end{cases}$$

QUINDI RICORSIVAMENTE FACCIO DA 1 A n E OTTENGO GLI ATTUATORI

ALGORITMO LUH WALKER - PAUL



DA CIO' ABBIAMO RISOLTO IL PROBLEMA DELLA CINEMATICA INVERSA E LA SCRIVIAMO BREVEMENTE $\begin{pmatrix} f_{i-1,i} \\ \mu_{i-1,i} \end{pmatrix}$

$\tau_{A,i} = LWP(q, \dot{q}, \ddot{q})$ => SI DOVREBBE CONSIDERARE ANCHE L'INERZIA DEL MOTORE MA PER IPOTESI SEMPLICISTICHE (DIRECT DRIVE)

PER EVITARE UN'EQUAZIONE IN PIÙ LA CONSIDERIAMO GIÀ SOMMATA A QUELLA DI TUTTO IL BRACCIO

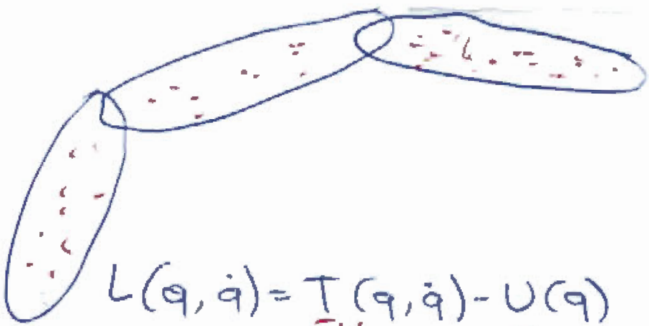
RIANALIZZIAMO QUESTO PROBLEMA CON IL

MODELLO LAGRANGIANO

3

DATO UN SISTEMA DI MASSE

COORDINATE DI LAGRANGE



OGNI MASSA CON $q, \dot{q}$ SI MUOVERÀ SU QUESTA TRAIETTORIA

$\Downarrow$

CON LA LAGRANGIANA NON DEVO PREOCCUPARMI CHE SONO TANTI CORPI RIGIDI ATTACCATI

$$L(q,\dot{q}) = \underbrace{T(q,\dot{q})}_{\text{EN. CIN.}} - \underbrace{U(q)}_{\text{EN. POT.}}$$

DA QUESTA POSSIAMO DIRE CHE DERIVANDO L

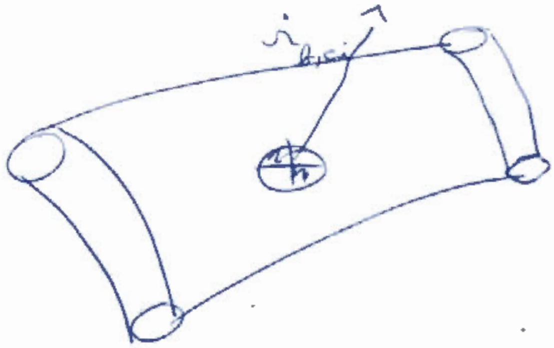
$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau_{NC}}$$

→ SE È ZERO ALLORA NON SONO APPLICATE FORZE NON CONSERVATIVE (OVVERO TUTTE TRANNE LA GRAVITÀ) SU DI ESSO

ANDIAMO AD APPLICARLA AL NOSTRO ROBOT

SCRIVIAMO L'ENERGIA CINETICA

$$T_i(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} m_i \, {}^b\dot{r}_{b,c_i}^T \, {}^b\dot{r}_{b,c_i} + \frac{1}{2} {}^b\omega_i^T \, {}^bI_{c_i}(q) \, {}^b\omega_i$$



DOBBIAMO SCRIVERLA IN FUNZIONE DI $q, \dot{q}$

SAPPIAMO CHE

$${}^b\dot{r}_{b,c_i} = J_{c_i}(q)\dot{q}$$

$${}^b\omega_i = J_{R_i}(q)\dot{q}$$

$${}^bI_{c_i} = {}^bR_i(q) \, {}^iI_{c_i} \, {}^bR_i^T(q)$$

↳ OVVIAMENTE DA 1 A i

QUINDI SOSTITUENDO

$$T(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T J_{c_i}^T(q) J_{c_i}(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T J_{c_i}^T(q) \, {}^bR_i(q) \, {}^iI_{c_i} \, {}^bR_i^T(q) + J_{R_i}(q)\dot{q}$$

DALLA FORMA QUADRATICA

$$T(q,\dot q)=\frac{1}{2}\dot q^T \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} m_i J_{ci}^T(q)J_{ci}(q)+J_{Ri}^T(q)\,{}^bR_i(q)\,{}^iI_{ci}\,{}^bR_i^T(q)J_{Ri}(q)\right)}_{\text{MATRICE DI INERZIA DEL ROBOT } B(q)}\dot q=$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\dot q^T B(q)\dot q}$$

4

INOLTRE RICORDANDO CHE CONOSCIAMO ANCHE LA U ANDIAMO AD APPLICARE IL MODELLO LAGRANGIANO

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(q,\dot q)}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\underbrace{\frac{\partial U}{\partial q}}_{g^T(q)}=\tau_{Mc}^T$$

$g^T(q)$ OVVERO SONO LE FORZE CHE TENGONO IN EQ. IL ROBOT

INIZIAMO A CALCOLARCI LE DERIVATE

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q}=\frac{\partial}{\partial \dot q}\frac{1}{2}\dot q^T B(q)\dot q=\dot q^T B(q)$$

QUINDI

$$\frac{d}{dt}\left(\dot q^T B(q)\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial \dot q^T B(q)\dot q}{\partial q}+g^T(q)=\tau_{Mc}^T$$

QUINDI

$$\ddot q^T B(q)+\dot q^T\dot B(q,\dot q)-\frac{1}{2}\frac{\partial \dot q^T B(q)\dot q}{\partial q}+g^T(q)=\tau_{Mc}^T$$

TRASPONENDO ORA

FORME QUAD.

$$\underset{\text{DEF. POS.}}{B(q)}\ddot q+\underbrace{\dot B(q,\dot q)\dot q-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \dot q^T B(q)\dot q}{\partial q}\right)^T}_{n(q,\dot q)}+g(q)=\tau_{Mc}\to \tau_A+\tau_F+J^T(q)\,{}^bF_{ER}$$

τ_A → FORZE SUI MOTORI

τ_F " DI ATTRITO

$J^T(q)\,{}^bF_{ER}$ " CHE ESERCITA L'AMBIENTE SUL ROBOT

QUINDI IL PROBLEMA INVERSO DELLA DINAMICA È

$$\tau_A=B(q)\ddot q+n(q,\dot q)+g(q)-\tau_F-J^T(q)\,{}^bF_{ER}$$

CON $\tau_F=-\underset{\text{MATRICE ATTRITO VISCOSO}}{D}\dot q$

MENTRE QUELLO DIRETTO

$$\ddot{q} = B^{-1}(q)\left(\tau_A - n(q,\dot{q}) - g(q) - D\dot{q} + J^T(q)\,{}^{B}F_{ER}\right)$$

DOVE LO STATO DEL ROBOT E' $q, \dot{q}$ OVVERO COME NEI SISTEMI

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{bmatrix}$$

RIFACCIAMO I CALCOLI PER IL NOSTRO ROBOT DELLA FORMULA DI EULERO-LAGRANGE

LEZIONE 13/12/2011

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau_{nc}^T$$

DOVE $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$

$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}$

INIZIAMO A FARE I VARI PASSAGGI

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q}}_{g^T(q)} = \tau_{nc}^T \Rightarrow$$

NEL MOMENTO IN CUI $\dot{q} = \ddot{q} = 0$ SI TORNA ALLA PARTE DI STATICA OVVERO ALL'EQUILIBRIO QUANDO IL ROBOT E' FERMO

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T = \tau_{nc}^T = \tau_A + J^T(q)\, {}^{e}F_{ER}$$

$\Downarrow$

FORZE CONSERVATIVE => POTENZIALI => GRAVITA'

τ_F NON C'E' PERCHE' IL ROBOT E' FERMO

SAPENDO CHE

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dot{q}^T B(q) \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \ddot{q}^T B(q) + \dot{q}^T \dot{B}(q,\dot{q})$$

E INOLTRE

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}\dot{q}^T B(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial B(q)\dot{q}}{\partial q}$$

SOSTITUENDO

$$\ddot{q}^T B(q) + \dot{q}^T \dot{B}(q,\dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial B(q)\dot{q}}{\partial q} + g^T(q) = \tau_{nc}^T$$

RIGA

RIGA

TRASPONIAMO

$$B(q)\ddot{q} + \dot{B}(q,\dot{q})\dot{q} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B(q)\dot{q}}{\partial q}\right)^T \dot{q} + g(q) = \tau_{nc}$$

$$B(q)\ddot{q} + m(q,\dot{q}) + g(q) = \tau_A - D\dot{q} + J^T(q)\, {}^{e}F_{ER}$$

$\hookrightarrow$ ATTRITO τ_F

$\Downarrow$ => CI RISOLVE IL PROBLEMA DI DINAMICA INVERSA

$\Downarrow$

DATO L'EFFETTO MI CALCOLA LE CAUSE

CHE POSSO SCRIVERE PIÙ SINTETICAMENTE

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau_A + J^T(q)\,{}^{b}F_{ER}$$

$$B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) = \tau_A + J^T(q)\,{}^{b}F_{ER}$$

E QUINDI RICAVO τ_A

$$\boxed{\tau_A = B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) - J^T(q)\,{}^{b}F_{ER}}$$

ANDANDO A CALCOLARCI LA DINAMICA DIRETTA POICHÉ B È INVERTIBILE

$$\boxed{\ddot{q} = B^{-1}(q)\left(\tau_A - n(q,\dot{q}) + J^T(q)\,{}^{b}F_{ER}\right)} \Rightarrow$$

QUINDI CONOSCENDO LO STATO INIZIALE τ_A E ${}^{b}F_{ER}$ POSSO CALCOLARMI CON UN INTEGRATORE

RICONSIDERIAMO PERÒ I NOSTRI CALCOLI PER CAPIRE COME SONO FATTE AL LORO INTERNO LE MATRICI

SAPPIAMO CHE IN EULERO-LAGRANGE IO HO n EQ. CON n NUMERO DI GIUNTI

QUINDI CONSIDERANDO CIÒ

$$B(q) = \left[b_1(q) \ \cdots \ b_n(q)\right] = \begin{bmatrix} b_1^T(q) \\ \vdots \\ b_n^T(q) \end{bmatrix}$$

SCRIVIAMO ORA EULERO LAGRANGE IN COORDINATE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \tau^{+}_{NC,k} \qquad k = 1, \dots, n$$

SAPENDO CHE

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right]_k = \left[\ddot{q}^T B(q)\right]_k + \left[\dot{q}^T \dot{B}(q,\dot{q})\right]_k \quad \text{DOVE} \quad \ddot{q}^T B(q) = \left[\ddot{q}^T b_1, \ \dots \ \ddot{q}^T b_n\right]_k$$

~~[illegible]~~

DOVE $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}^T b_k(q)$

QUINDI RISCRIVENDO

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\dot{q}^T b_k(q) = \ddot{q}^T b_k(q) + \dot{q}^T \frac{d b_k}{dq}\dot{q}$$

FATTO IL CALCOLO PIÙ COMPLESSO RISCRIVIAMO TUTTO SOSTITUENDO

$$\ddot{q}^T b_k(q) + \dot{q}^T \frac{d b_k}{dq}\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial B}{\partial q_k}\dot{q} + g_k(q) = \tau_{HC,k}^T$$

$$b_k^T(q)\ddot{q} + \dot{q}^T\left(\frac{d b_k}{dq} - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right)\dot{q} + g_k^T(q) = \tau_{HC,k}$$

$$B(q)\ddot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}^T \tilde{S}_1(q)\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \tilde{S}_m(q)\dot{q}\end{bmatrix}}_{C(q,\dot{q})\dot{q}} + g_k^T(q) = \tau_{HC,k} \qquad \text{con } \tilde{S}_k(q) = \frac{d b_k}{dq} - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial q_k}$$

$\hookrightarrow$ FORZE CENTRIFUGHE

UTILIZZANDO ORA LA SIMMETRIA DELLE MATRICI

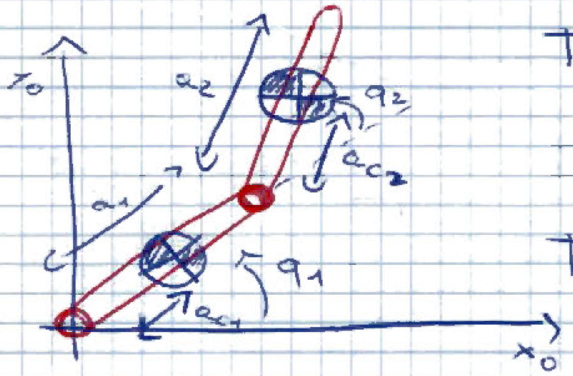
$$S_k(q) = \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_k(q) + \tilde{S}_k^T(q)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{d b_k}{dq} + \left(\frac{d b_k}{dq}\right)^T - \frac{\partial B}{\partial q_k}\right]$$

QUINDI

$$B(q)\ddot{q} + \begin{bmatrix} \dot{q}^T S_1(q)\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T S_m(q)\dot{q}\end{bmatrix} + \left(\frac{dU}{dq}\right)^T = \tau_A - D\dot{q} + J^T(q)\,{}^{e}F_{ER}$$

ESEMPIO

ROBOT PLANARE



$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 \|{}^0\dot{r}_{0,c_1}\|^2 + \frac{1}{2}I_{c_1}\dot{q}_1^2 \qquad ({}^0\dot{r}_{0,ck}^T\,{}^0\dot{r}_{0,ck})$$

$$\text{con } I_{c_1} = {}^1Z_1^{T}\,{}^1I_{c_1}\,{}^1Z_1$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 \|{}^0\dot{r}_{0c2}\|^2 + \frac{1}{2}I_{c_2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

CHIAMANDO TUTTO CON $k \Rightarrow k = 1,2$

$${}^0\dot{r}_{0ck} = J_{ck}(q)\dot{q}_k$$

QUINDI CALCOLANDO

$$T_{tot} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} m_k \dot{q}_k^T J_{ck}^T(q) J_{ck}(q)\dot{q}_k + \frac{1}{2}I_{ck}\dot{q}_k^2$$

CALCOLIAMO

$$\|\dot r_{0,c_1}\|^2 = a_{c_1}^2\,\dot q_1^2$$

QUINDI RISCRIVO SEPARANDO 1,2

$$T = \frac{1}{2} m_1 a_{c_1}^2 \dot q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot q_2^T \underbrace{J_{c_2}^T(q)\, J_{c_2}(q)\, \dot q_2}_{\|J_{c_2}(q)\dot q_2\|^2} + \frac{1}{2} I_{c_1} \dot q_1^2 + \frac{1}{2} I_{c_2} \dot q$$

CALCOLIAMO

$$J_{c_2}(q) = \begin{bmatrix} -a_1 s(q_1) - a_{c_2} s(q_1+q_2) & -a_{c_2} s(q_1+q_2) \\ a_1 c(q_1) + a_{c_2} c(q_1+q_2) & a_{c_2} c(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

QUINDI

$$J_{c_2}^T(q)\, J_{c_2}(q) = \begin{bmatrix} a_1^2 + a_{c_2}^2 + 2 a_1 a_{c_2} c(q_2) & a_{c_2}^2 + a_1 a_{c_2} c(q_2) \\ a_{c_2}^2 + a_1 a_{c_2}\big(c(q_1)c(q_1+q_2) + s(q_1)s(q_1+q_2)\big) & a_{c_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$J^T \quad \begin{matrix} -a_1 & a_1 & -a_1 & -a_{c_2} \\ -a_{c_2} & a_{c_2} & a_1 & \end{matrix}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 a_{c_1}^2 + I_{c_1}\right)\dot q_1^2 + \frac{1}{2} I_{c_2} \dot q_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot q^T \begin{bmatrix} a_1^2 + a_{c_2}^2 + 2a_1 a_{c_2} c(q_2) & \\ a_{c_2}^2 + a_1 a_{c_2} c(q_2) & \end{bmatrix} \dot q$$

$$+ \frac{1}{2} \dot q^T \begin{bmatrix} m_1 a_{c_1}^2 + I_{c_1} & 0 \\ 0 & I_{c_2} \end{bmatrix} \dot q$$

CALCOLIAMO $B(q)$

$$B(q) = \begin{bmatrix} m_1 a_{c_1}^2 + I_{c_1} + m_2\left(a_1^2 + a_{c_2}^2\right) + 2 m_2 a_1 a_{c_2} c(q_2) & \oplus \\ m_2 a_{c_2}^2 + m_2 a_1 a_{c_2} c(q_2) & m_2 a_{c_2}^2 + I_{c_2} \end{bmatrix}$$

ORA CALCOLIAMO

$$S_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{dB_1}{dq} + \left(\frac{dB_1}{dq}\right)^T - \overset{0}{\frac{\partial B}{\partial q_1}}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 0 & -2m_2 a_1 a_{c2} s(q_2) \\ 0 & -m_2 a_1 a_{c2} s(q_2) \end{bmatrix} + (\cdot)^T\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} m_2 a_1 a_{c2} s(q_2)$$

QUINDI

$$\dot q^T S_1 \dot q = -m_2 a_1 a_{c2} s(q_2)\left(2\dot q_1 \dot q_2 + \dot q_2^2\right)$$

QUINDI

$$n(q, \dot q) = \begin{bmatrix} \overbrace{-m_2 a_1 a_{c2} s(q_2)\left(2\dot q_1 \dot q_2 + \dot q_2^2\right)}^{\dot q^T S_1 \dot q} \\ \dot q^T S_2 \dot q \end{bmatrix}$$

MENTRE $S_2 = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 0 & -m_2 a_1 a_{c2} s(q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\cdot)^T - \frac{\partial B}{\partial q_2}\right] =$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} m_2 a_1 a_{c2} s(q_2) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2m_2 a_1 a_{c2} s(q_2) & -m_2 a_1 a_{c2} s(q_2) \\ -m_2 a_1 a_{c2} s(q_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= m_2 a_1 a_{c2} s(q_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot q^T S_2 \dot q = \dot q_1^2 m_2 a_1 a_{c2} s(q_2)$$

MENTRE

$$U(q) = m_1 g_1 a_{c1} s(q_1) + m_2 g\left(a_1 \operatorname{sen}(q_1) + a_{c2} s(q_1+q_2)\right)$$

$$\left(\frac{dU}{dq}\right)^T = \begin{bmatrix} m_1 g a_{c1} c(q_1) + m_2 g\left(a_1 c(q_1) + a_{c2} c(q_1+q_2)\right) \\ m_2 g a_{c2} c(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

QUINDI SCRIVENDO IL MODELLO PER ESTESO

$$B(q) = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 + m_2 a_{c2}^2 + 2 m_2 a_1 a_{c2} c(q_2) & \\ m_2 a_{c2}^2 + m_2 a_1 a_{c2} c(q_2) & \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{I}_1 = m_1 a_{c1}^2 + I_{c1} + m_2 a_1^2$$

$$\bar{I}_2 = m_2 a_{c2}^2 + I_{c2}$$

LE DUE EQUAZIONI PER ESTESO SARANNO

$$\left(\tilde{I}_1 + m_2 a_{c2}^2 + 2 m_2 a_1 a_{c2} c(q_2)\right) \ddot{q}_1 + \left(m_2 a_{c2}^2 + m_2 a_1 a_{c2} c(q_2)\right) \ddot{q}_2 +$$

$$- m_2 a_1 a_{c2} \left(\dot{q}_2^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2\right) s(q_2) + d_1 \dot{q}_1 + \left(m_1 g a_{c1} + \right.$$

$$\left. + m_2 g a_{c2}\right) c(q_1) + m_2 g a_{c2} c(q_1 + q_2) = \tau_{A_1}$$

$$\left(m_2 a_{c2}^2 + m_2 a_1 a_{c2} c(q_2)\right) \ddot{q}_1 + \bar{I}_2 \ddot{q}_2 + m_2 a_1 a_{c2} s(q_2) \dot{q}_1^2 + d_2 \dot{q}_2 +$$

$$+ m_2 g a_{c2} c(q_1 + q_2) = \tau_{A_2}$$

DEFINIAMO UN VETTORE DI PARAMETRI E SCRIVIAMO TUTTO LINEARMENTE

$$\theta = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ m_2 a_{c2}^2 \\ m_2 a_1 a_{c2} \\ d_1 \\ d_2 \\ m_1 g a_{c1} + m_2 g a_1 \\ m_2 g a_{c2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{matrix} \Rightarrow Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\, \theta = \tau_A$$

PARAMETRO IN PIÙ CHE NON C'È

⇓

NON CONS. LE FORZE ESTERNE F_{EE}

QUINDI

$$
\begin{bmatrix}
\ddot{q}_1 & 0 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & c(q_2)(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)-s(q_2)(\dot{q}_2^2+2\dot{q}_1\dot{q}_2) & \dot{q}_1 & 0 & c(q_1) & c(q_1+ \\
0 & \ddot{q}_2 & \ddot{q}_1 & c(q_2)\ddot{q}_1+s(q_2)\dot{q}_1^2 & 0 & \dot{q}_2 & 0 & c(q_1+
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{A1} \\ \tau_{A2} \end{bmatrix}
$$

DA QUESTA FACENDO UN PO DI ESPERIMENTI OVVERO METTENDO τ_A ~~...~~ POSSIAMO TROVARE θ CON L'ERRORE DEI MINIMI QUADRATI

CONTROLLO 11/12/2011

RICONSIDERIAMO

$$\ddot{q} = B^{-1}(q)\left(\tau_A - n(q,\dot{q})\right)$$ DOVE $n(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q)$

IL CONTROLLO VA IMPLEMENTATO SU τ_A CHE DIPENDE DA q E $\dot{q}$

- RICORDANDO ORA CHE

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ B^{-1}(x_1)\left(\tau_A(x_1,x_2) - n(x_1,x_2)\right) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

OVVIAMENTE τ_A DIPENDERÀ ANCHE DAL TEMPO

$$\tau_A(t,q,\dot{q}) = \tau_A\left(q_d(t), q(t), \dot{q}(t)\right)$$

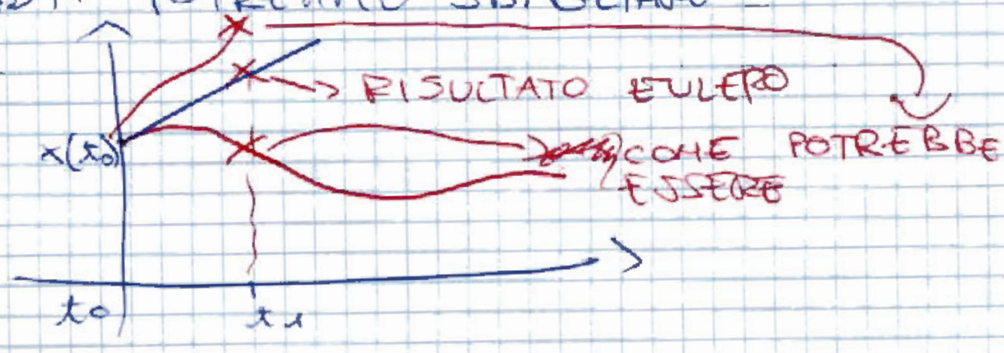
- RICORDANDO EULERO

$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ CON t_k $k = 0, \dots, N$

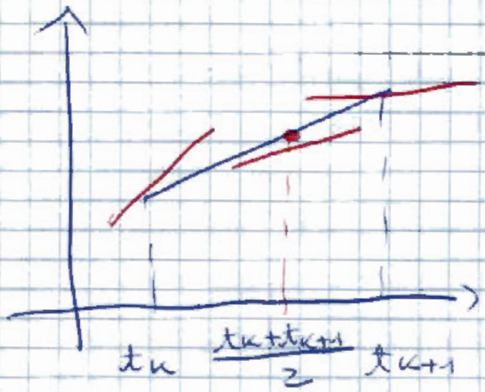
$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \dot{x}(t_k)(t_{k+1} - t_k) =$$ CON $\Rightarrow x(t_0)$ NOTO

$$= x(t_k) + f(t_k, x(t_k))(t_{k+1} - t_k)$$

EULERO FUNZIONA BENE SOLO SE GLI INSTANTI DI TEMPO t_k SONO MOLTO VICINI TRA LORO ALTRIMENTI POTREMMO SBAGLIARE



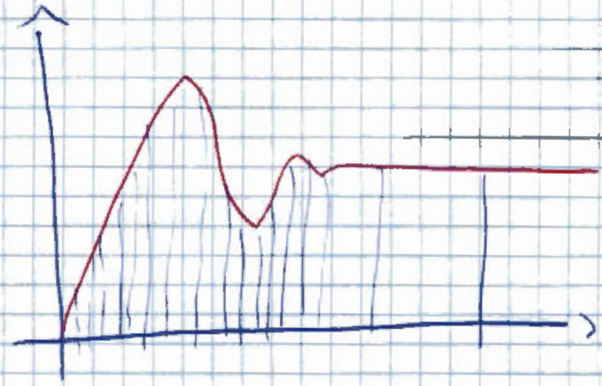
SI USA RUNGE - KUTTA OVVERO INVECE DI PRENDERE DIRETTAMENTE LA DERIVATA PRENDO UNA MEDIA PESATA DEI TRE



$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \tilde{f}\,(t_{k+1} - t_k)$$

$\Downarrow$

VIENE DATA LA SOLUZIONE CON UN PASSO CHE VARIA AUTOMATICAMENTE



ANDIAMO A VEDERE COME CREARE ORA IL NOSTRO CONTROLLO PER IL ROBOT

VOGLIAMO TROVARE I MOVIMENTI CHE DEVO FARE PER PORTARE IL MIO ROBOT IN q_d $\Rightarrow$ QUINDI POI DOVREMMO OVVIAMENTE VEDERE OVVERO TRASF. CON LA CIN. INV. LE COORD. DI GIUNTO

- OVVIAMENTE NON POSSIAMO TROVARE UNA

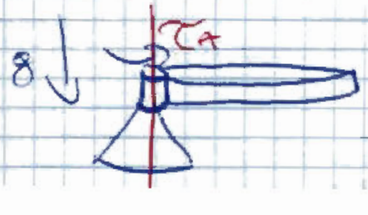
$\tau_m = \varphi(q_d)$ $\Rightarrow$ NON C'È MAI UNA SOLUZIONE PERFETTA

$\Downarrow$

PER QUESTO SERVE IL CONTROLLO

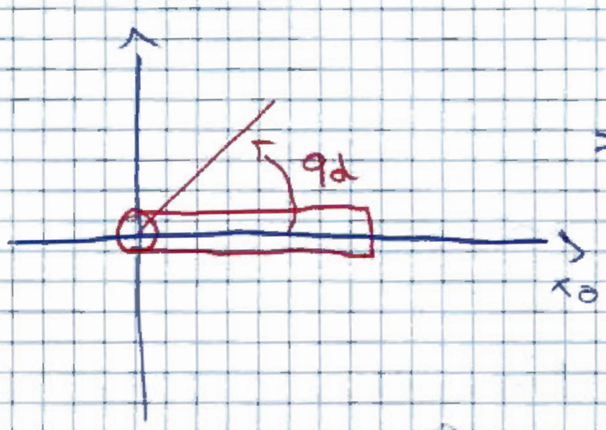
USIAMO UN CONTROLLO PROPORZIONALE DERIVATIVO

- VEDIAMO CON UN BRACCIO SOLO



$$I \cdot \ddot{q} + d\dot{q} = \tau_A$$

CONSIDERIAMO TUTTO SENZA GRAVITÀ PER SEMPLIFICARE



$$I\ddot{q} = k_p(q_d - q) \text{ ERRORE}$$

$$\Rightarrow \tau_A = k_p(q_d - q)$$

DOBBIAMO USARE ANCHE IL DERIVATIVO PERCHÉ È UN PROBLEMA DEL SECONDO ORDINE QUINDI SE NON LO FACESSI PUR ARRIVANDO A q_d NON MI SI ANNULLEREBBE LA VELOCITÀ

$\Downarrow$

IL NOSTRO RISULTATO QUINDI DEVE ESSERE $\Rightarrow \begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$

QUINDI CONS. IL DERIVATIVO

$$\dot{x} = Ax$$

$$x = \begin{bmatrix} q - q_d \\ \dot{q} - \dot{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q - q_d \\ \dot{q} \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\dot{x}}_{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_p}{I} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} q - q_d \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_{x}$$

$$\ddot{q} = \frac{k_p}{I}(q_d - q)$$

CALCOLANDO ORA GLI AUTOVALORI

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k_p}{I} & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{k_p}{I} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k_p}{I}}$$

$\Downarrow$

ARMONICO

$\Downarrow$

OSCILLA

CONSIDERIAMO ORA L'ATTRITO

$$I\ddot{q} + d\dot{q} = k_p(q_d - q_d)$$

QUINDI RICALCOLANDO

$$\ddot{q} = \frac{k_p}{I}(q_d - q) - \frac{d}{I}\dot{q}$$

QUINDI

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot q \\ \ddot q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_p}{I} & -\frac{d}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q - q_d \\ \dot q \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k_p}{I} & \lambda + \frac{d}{I} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda\left(\lambda + \frac{d}{I}\right)^2 + \frac{k_p}{I} = \boxed{\lambda^2 + \frac{d}{I}\lambda + \frac{k_p}{I}}$$

⇓

SONO STAB

⇓

HANNO PARTE REALE NEGATIVA

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2I} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4I^2} - \frac{k_p}{I}} \Leftarrow$$

SE HO ABBASTANZA ATTRITO d DIVENTA REALE QUESTO TERMINE QUINDI EVITO L'ARMONICO

⇓

SENNO' OSCILLA

NON DEVO AVERE SOVRAELONGAZIONI

OVVIAMENTE L'ATTRITO GRANDE LO IMPLEMENTO VIA SOFTWARE OVVERO

$$I\ddot q + d\dot q = k_p(q_d - q) - k_D \dot q$$ → ATTRITO SIMULATO

QUINDI

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d + k_D}{2I} \pm \sqrt{\frac{(d+k_D)^2}{4I^2} - \frac{k_p}{I}}$$

INTRODUCIAMO ORA LA GRAVITA'

→ NON E' PIU' LINEARE ⇒ C'E' IL $\cos q$

$$I\ddot q + d\dot q + mg\, a_c \cos q = \tau_A = k_p(q_d - q) - k_D \dot q$$

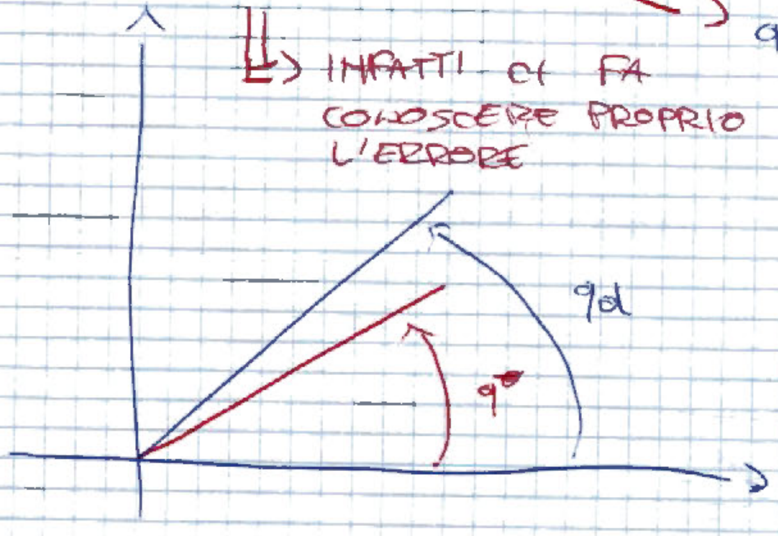
↳ SE UTILIZZO IL PROPORZIONALE DERIVATIVO NON ARRIVO AL RISULTATO

INFATTI

$\rightarrow$ C'È ANCORA ERRORE

$$mg\,a_c \cos q^* = K_P (q_d - q^*) \Longrightarrow q_d - q^* = \frac{1}{K_P}(mg\,a_c \cos q^*$$

$\Downarrow$ INFATTI CI FA CONOSCERE PROPRIO L'ERRORE



$$\Downarrow$$

$$q^* = q_d - \frac{1}{K_P}(mg\,a_c \cos$$

HO L'ERRORE A REG

$$|q_d - q^*| \le \frac{1}{K_P} mg\,a_c$$

CON L'INTEGRATIVO ELIMINO L'ERRORE A REGIME

$$\tau_A = K_P(q_d - q) - K_D \dot{q} + K_I \int_0^t (q_d - q)\,d\tau$$

VEDIAMO COME INSERIRLA

CHIAMO LA NOSTRA TERZA VAR. DI STATO

$$x_3(t) = \int_0^t (q_d - q)\,d\tau$$

QUINDI

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q - q_d \\ \dot{q} \\ \int_0^t (q_d - q)\,d\tau = I_E(t) \end{bmatrix}$$

DERIVANDO x_3 SI HA CHE

RICAVIAMO x_2

$$\dot{x}_3(t) = q_d - q \Rightarrow I\ddot{q} + d\,\dot{q} = -K_P x_1 - K_D x_2 + K_I x_3$$

$$\Downarrow$$

QUINDI

$$\ddot{q} = \dot{x}_2 = \frac{1}{I}\left(-K_P x_1 - (K_D + d)x_2 + K\right.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_P}{I} & -\frac{d+K_D}{I} & \frac{K_I}{I} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

PER TROVARE L'EQUILI SI IMPONE LE DER. PARI A ZERO

ERRO

$$\dot{x}_3 = q_d - q = 0 \Rightarrow \text{ANNU}$$

MA L'INTEGRATIVO MI DEVE ANCHE ELIMINARE LA NON LINEARITA' QUINDI LA REINTRODUCO

$$I\ddot{q} + d\dot{q}_{x_2} + (mg\, a_c \cos(q+x_1))\, x_1 = -K_P x_1 - K_D x_2 + K_I x_3$$

QUINDI

$$\ddot{q} = \dot{x}_2 = \frac{1}{I}\left(-K_P x_1 - (K_D + d)\, x_2 + K_I x_3\right) - \frac{1}{I} mg\, a_c \cos(q_d + x_1)$$

QUINDI

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_P}{I} & -\frac{d+K_D}{I} & +\frac{K_I}{I} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg\, a_c \cos(q_d + x_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

QUINDI DERIVA CHE

$x_1 = 0 \Rightarrow q = q_d$ SIAMO IN POS.

$x_2 = 0 \Rightarrow \dot{q} = 0$ SI FERMA LI

$K_I x_3 = mg\, a_c \cos(q_d) \Rightarrow$ MI TIENE L'EQUILIBRIO

$\Downarrow$

COMPENSA IL NON LINEARE

NON E' DETTO PERO' CHE TROVATO IL TERMINE INTEGRALE ~~...~~ IL MIO SISTEMA SIA STABILE

SI PREFERISCE COMPENSARE LA NON LINEARITA' AGGIUNGENDOLA AL MODELLO $\Rightarrow$ SE POSSO CALCOLARLO

$\Downarrow$

STABILITA' ASSICURATA

$$I\ddot{q} + d\dot{q} + \cancel{mg\, a_c \cos q} = \tau_A = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + \cancel{mg\, a_c \cos q}$$

COMPENSAZIONE DELLA NON LINEARITA' DELLA GRAVITA'

VEDIAMO ORA IL CASO DI UN ROBOT COMPLETO

$$B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) + g(q) = \tau_A$$

IL NOSTRO OBIETTIVO E' ~~[illegible]~~ CREARE UN CONTROLLO DI POSIZIONE

$$\boxed{\begin{matrix} q_d \\ \dot{q}=0 \end{matrix}}$$

COME PRIMA

$$\tau_A = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + g(q) \Rightarrow \text{SIAMO IN EQUILIBRI}$$

$$K_P \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad E \quad |K_P| \neq 0$$

$$K_D \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

QUINDI K_P DEVE ESSERE DEF. POS. E SIMMETRICA

K_D DEF. POS.

⇓

QUINDI POSSIAMO DIMOSTRARE CHE SIAMO STABILI NEL PUNTO DI EQUILIBRIO ⇐ CON LIAPUNOV

⇓

$V(x) > 0 \quad \dot{x} = f(x)$

$\dot{V}(x) \leq 0$

⇓

ALLORA AS. STAB. ~~STABILE~~ ⇒ MA SE $\dot{V}(x) \leq 0$ ⇒ STAB. SEMPL.

⇓

NON SONO SICURO DI CONVERGERE ALLA TRAIETTO[RIA] ⇒ USO IL TEOREMA DI

LA SALLE

⇓

$x(t)$ ⇒ IL PIU' GRANDE INSIEME f-INVARIANTE CONTENUTO NELL'INSIEME DEL NULLO DI

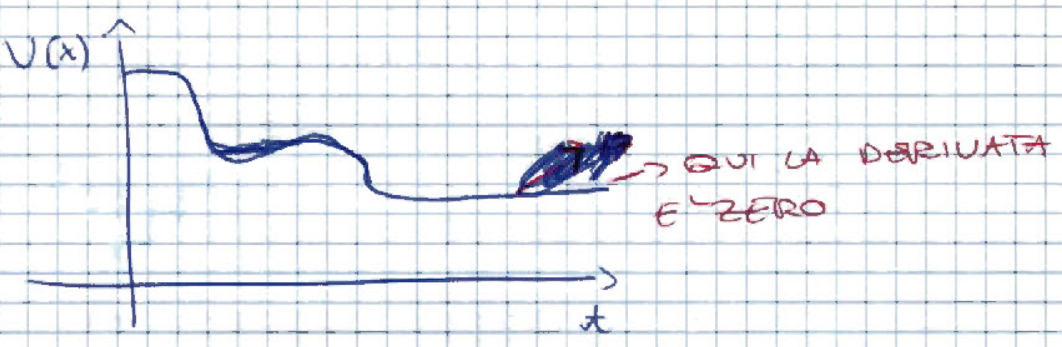
$$N_V = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$$

OVVERO E' STABILE AS.

VUOL DIRE CHE SE LA TRAIETTORIA INIZIA IN QUELL'INSIEME FINISCE IN QUELL'INSIEME

- I PUNTI DI EQUILIBRIO SONO f INVARIANTI

LE TRAIETTORIE QUINDI SARANNO DI V



TORNIAMO AL NOSTRO PROBLEMA E TROVIAMO LA FUNZIONE DI LIAPUNOV

- IL CONTROLLO PD E' COME UNA MOLLA VIRTUALE

$$V(q,\dot q) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\dot q^T B(q)\dot q}}_{T} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}(q_d-q)^T K_P (q_d-q)}}_{U_{\text{molla virtuale}}}$$

↳ SI ANNULLA SOLO SE

$\dot q = 0 \quad q = q_d$

ANDIAMO QUINDI A DERIVARE

$$\frac{dE}{dt} = (\tau_A - D\dot q)^T \dot q = \tau_A^T \dot q - \dot q^T D \dot q$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dq}\dot q = \frac{dT}{dt} + g^T(q)\dot q$$

QUINDI UGUAGLIANDOLE OTTENGO

$$\frac{dT(q,\dot q)}{dt} = \dot q^T \tau_A - \dot q^T D \dot q - g^T(q)\dot q$$

MENTRE LA DERIVATA DI $U_{\text{molla virtuale}}$ SARA'

$$\frac{dU}{dt} = -(q_d-q)^T K_P \dot q$$

QUINDI

$$\frac{dV}{dt} = \dot q^T \tau_A - \dot q^T D \dot q - g^T(q)\dot q - (q_d-q)^T K_P \dot q$$

ANDIAMO A SOSTITUIRE IL NOSTRO τ_A

$$\frac{dU}{dt} = \dot{q}^T\left(\cancel{K_P(q_d - q)} - K_D\dot{q} + \cancel{g(q)}\right) - \dot{q}^T D\dot{q} - \cancel{g^T(q)\dot{q}} - \cancel{(q_d - q)^T K_P\dot{q}}$$

SONO SCALARI

$$= -\dot{q}^T K_D\dot{q} - \dot{q}^T D\dot{q} = -\dot{q}^T(K_D + D)\dot{q}$$

$\dot{V}(q,\dot{q}) = -\dot{q}^T(K_D + D)\dot{q} \Rightarrow$ ~~DEF~~ NON ESSENDO DEFINITA IN $q, \dot{q}$ ALLORA È SEMI DEF. NEG. POICHÉ $\dot{q} = 0$

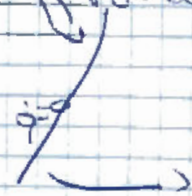
$\Downarrow$

MA SE $\dot{q} = 0$ NON È DETTO CHE NOI STIAMO IN q_d

$\Leftarrow$ QUINDI PER LA SALLE DOBBIAMO VERIFICARE CHE

$H_V = \{(q,\dot{q}) : \dot{q} = 0\} \Rightarrow$ POTREI AVERE $\dot{q} = 0$ MA $\ddot{q} \neq 0$

ESEMPIO PENDOLO



$$\hookrightarrow B(q)\ddot{q} + \cancel{g(q)} = K_P(q_d - q) + \cancel{g(q)}$$

$\Downarrow$

$$\ddot{q} = B^{-1}(q) K_P (q_d - q)$$

$\Downarrow$

L'UNICA SOL. PER AVERE $\ddot{q} = 0$ È SOLO PER $q = q_d$

$\Downarrow$

QUINDI SE SONO ARRIVATO A $q = q_d$ AVRÒ $\dot{q} = 0$ $\ddot{q} = 0$ ALTRIMENTI AVREI $\dot{q} = 0$ MA $\ddot{q} \neq 0$

DERIVA DALL'E... DEL PEN...

CI SONO DUE PROBLEMI
- CALCOLARE $g(q)$
- CALCOLO UNIFICATO

PER RISOLVERE QUESTO PROBLEMA COMPENSIAMO $g(q)$ SOLO NEL PUNTO DI EQUILIBRIO q_d OVVERO $g(q_d)$

- CI SEMPLIFICA I CALCOLI E CI PERMETTE NEL CALCOLO UNIFICATO DI NON RICALCOLARE OGNI VOLTA $g(q)$ MA SOLO

$$K_{P,i}\,(q_{d,i} - q_i) - K_{D,i}\,\dot{q}_i$$

15/12/2014

DIMOSTRIAMO ~~CHE~~ LA STABILITA' NEL CASO LA COMPEN[SAZIONE]
LA CALCOLIAMO UNA VOLTA SOLA IN q_d COME DETTO PRIMA

$B(q)\ddot{q} + m(q,\dot{q}) + g(q) = \tau_A \qquad \tau_A = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} + g(q_d)$

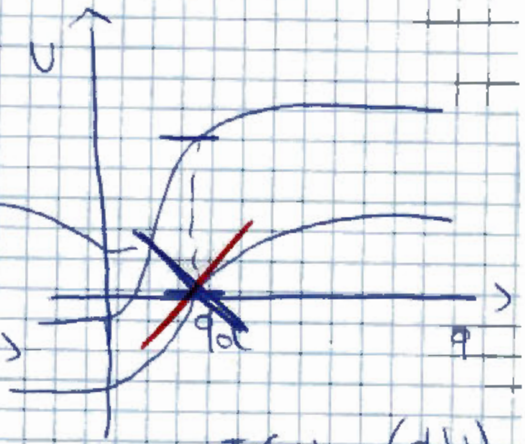
LE NOSTRE ENERGIE SARANNO

$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}$ E CONSIDERIAMO

STIAMO COSTRUENDO UNA BUONA FUNZIONE DI LIAPUNOV ~~PER VEDERE~~ $\Leftarrow$ $U_1(q) = U(q) - U(q_d)$

$\Downarrow$

SOMMIAMO L'OPPOSTO DELLA $g^T(q_d)$ CHE E' LA TANGENTE ALLA CURVA



DATA U_1 E LE NOSTRE CONSIDERAZIONI $\Rightarrow$ OTTENIAMO

$$U_2(q) = U(q) - U(q_d) + g^T(q_d)(q_d - q) \Longleftarrow g^T(q_d) = \left(\frac{dU}{dq}\right)_{q_d}$$

DERIVANDO

$$\left(\frac{dU_2}{dq}\right)_{q_d} = \left(\frac{dU}{dq} - g^T(q_d)\right)_{q_d} \Rightarrow \text{MA NON ANCORA E' DETTO CHE SIA DEF. POS}$$

QUINDI

$$U_3(q) = U(q) - U(q_d) + g^T(q_d)(q_d - q) + \frac{1}{2}(q_d - q)^T K_P (q_d - q)$$

K_P DEVE ~~ESSERE~~ ABBASTANZA ELEVATA DA PORTARE SU $U(q)$

VEDIAMO CHE SIAMO NEL PUNTO DI MINIMO

$$\frac{dU_3}{dq} = \overbrace{\frac{dU}{dq}}^{g^T(q_d)} - g^T(q_d) - (q_d - q)^T K_P \Rightarrow \text{QUESTA E' ZERO}$$

$$\frac{d^2U_3}{dq^2} = \frac{d}{dq}\left(\left(\frac{dU}{dq}\right)^T - g(q_d) - K_P(q_d - q)\right) = \frac{d^2U}{dq^2} + K_P > 0$$

$\hookrightarrow$ K_P DEVE ESSERE ABBASTAN[ZA]

GRANDE DA ESSERE MAGGIORE DI ...

QUINDI SE SONO VERIFICATE QUESTE CONDIZIONI
LA DERIVATA PRIMA SI ANNULLA SOLO IN q_d OVVERO
IL MIO MINIMO => CI SERVE POI PER LA SALLE

$$g(q)-g(q_d)-K_P(q_d-q)=0 \quad \Rightarrow q=q_d$$

QUINDI LA CONDIZIONE DI EQ. È

$$g(q)=g(q_d)+K_P(q_d-q)$$

QUINDI LA MIA FUNZIONE DI LIAPUNOV SARÀ

$$V(q,\dot q)=\underbrace{\frac{1}{2}\dot q^T B(q)\dot q+U(q)}_{\text{ENERGIA MECCANICA TOTALE}}-U(q_d)+g^T(q_d)(q_d-q)+\frac{1}{2}(q_d-q)^T K_P(q_d-q)$$

$$\frac{dE}{dt}=\dot q^T(\tau_A-D\dot q)$$

QUINDI DERIVIAMO LIAPUNOV
LIAPUNZ.

$$\frac{dV}{dt}=\dot q^T(\tau_A-D\dot q)-g^T(q_d)\dot q-(q_d-q)^T K_P\dot q=$$

$$=\dot q^T\left(\cancel{K_P(q_d-q)}-K_D\dot q+\cancel{g(q_d)}\right)-\dot q^T D\dot q-\cancel{g^T(q_d)\dot q}-\cancel{(q_d-q)^T K_P\dot q}$$

$$=-\dot q^T(K_D+D)\dot q\leq 0 \Rightarrow$$ È SOLO SEMI DEF. POS. => SAPPIAMO CHE È STABILE QUINDI

MA PER LA SALLE

$$M_V=\{(q,\dot q)\mid \dot q=0\}$$

CONSIDERANDO UN $\bar q$ PERCHÉ ESSO SIA AS. STAB. PER LA SALLE NELLE COPPIE $q,\dot q$ DEVE ESSERE CHE

$\dot q=0$ => NON SI SPOSTA IL CORPO DA $\bar q$ => $\dot q=\ddot q=0$ PER FAR RESTARE IL CORPO FERMO

QUINDI

$$B(\bar{q})\ddot{q} + g(\bar{q}) = K_P(q_d - \bar{q}) + g(q_d)$$

$\Downarrow$

$$\ddot{q} = B^{-1}(\bar{q})\underbrace{\left(K_P(q_d - \bar{q}) + g(q_d) - g(\bar{q})\right)}_{=0}$$

$\Downarrow$

SOLO QUESTO PUÒ VALERE ZERO

$\Downarrow$

SI ANNULLA SOLO SE

$\boxed{q_d = \bar{q}}$ QUELLO CHE NOI VOLEVAMO

ANDIAMO ORA A VEDERE IL CASO IN CUI IO NON METTO LA COMPENSAZIONE

$$B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) + g(q) = \tau_A \qquad \tau_A = K_P(q_d - q) - K_D\dot{q}$$

DI NUOVO

$$\ddot{q} = \dot{q} = 0 \Rightarrow g(q^*) = K_P(q_d - q^*) \Rightarrow q^* = q_d - K_P^{-1} g(q^*)$$

LA FUNZ.

QUINDI COME PRIMA LIAPUNOV

$$V(q,\dot{q}^*) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + U(q) - U(q^*) + g^T(q^*)(q^* - q) + \frac{1}{2}(q^* - q)^T K$$

PER K_P GRANDE SARÀ UN MINIMO UNICO CHE È q^* CHE SODDISFA

$\Downarrow$

$$g(q^*) = K_P(q_d - q^*) \quad \text{CON} \quad \frac{d^2U}{dq^2} + K_P$$

RICONSIDERANDO LA LEGGE DI CONTROLLO

$$\tau_A = K_P(q^* - q) - K_D\dot{q} + K_P(q_d - q^*)$$

CHE POI È PROPRIO

$$\tau_A = K_P(q^* - q) - K_D\dot{q} + g(q^*) \Rightarrow$$ QUINDI I CALCOLI POI SARANNO UGUALI

QUESTE TRE ANALISI FATTE OVVERO

- COMPENSAZIONE PERFETTA
- // NEL PUNTO FINALE
- NON COMP.

CI FANNO CAPIRE COME FUNZIONA MATEMATICAMENTE IL ROBOT

⇓

IN REALTA'
VIENE AGGIUNTO
ANCHE SE CON
CAUTELA UN TERMINE
INTEGRALE

⇒ POICHE' NON SI
RIESCE MAI A
PORTARE PERFETTAMENTE
A ZERO L'ERRORE

CONTROLLO A COPPIA PRECALCOLATA

NON CONS. UNA COORD. ⇒ IN ROBOTICA SI SCOMPONE IN TANTE COORD.

SFRUTTANDO L'INVERSA DEL MODELLO

TRAIETTORIA

$$\tau_A = \underbrace{B(q_d(t))\,\ddot{q}_d(t) + n(q_d(t), \dot{q}_d(t))}_{\text{INVERSA}} + \underbrace{K_P(q_d - q) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q})}_{\text{AGGIUNTI}}$$

VUOL DIRE CHE
SE SONO SULLA
TRAIETTORIA ALLORA
I TERMINI AGGIUNTI
SONO ZERO E QUINDI
LE COPPIE DATE SONO BUONE
ALTRIMENTI ENTRANO IN
GIOCO K_P E K_D CHE CI
RIPORTANO IL TUTTO IN
TRAIETTORIA

⇒ LE MISURE SONO
PRECALCOLATE
NON IN LINEA

RICONSIDERIAMO I TRE CASI DI COMPENSAZIONE

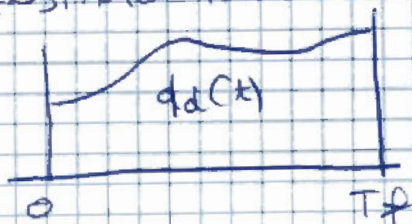
20/12/20

CONSIDERIAMO ORA UN ALTRA IDEA DI CONTROLLO

$$\tau_A = K_A \ddot{q}_d + K_d (q_d - q) + K_D (\dot{q}_d - \dot{q}) + g$$

CI SERVE UNA MATRICE PER CONTROLLARE L'ACCELERAZIONE $\Rightarrow$ NON È BUONA

PENSIAMO INVECE ADESSO AD



IPOTIZZIAMO CHE

$q(0) = q_d(0)$
$\dot{q}(0) = \dot{q}_d(0)$ $\Rightarrow$ IL ROBOT ALL'INIZIO SI TROVA IN TRAIETTORIA

QUINDI DAL MODELLO

$$\tau_{A,m}(t) = B(q_d)\ddot{q}_d + n(q_d, \dot{q}_d)$$

$\rightarrow$ PRE COMPUTED TORQUE

DA QUESTA ANDREMMO A PRECALCOLARE LE COPPIE CHE CI SERVIRANNO PER CONTROLLARE $\ddot{q}_d$ OVVERO AL POSTO KA INIZIALE SOSTITUISCO INVECE

$$\tau_A = \underbrace{\overbrace{B(q_d)\ddot{q}_d + n(q_d, \dot{q}_d)}^{\text{CALCOLO NON IN LINEA}}}_{\text{MI DANNO UNA COPPIA NOMINALE PRE CALCOLATA}} + \underbrace{\overbrace{K_P(q_d - q) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q})}^{\text{CALCOLO IN LINEA}}}_{\text{CI RIPORTANO IN TRAIETTORIA NEL CASO IN CUI USCIAMO FUORI}} =$$

$$= \underbrace{B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q})}_{\text{TRAIETTORIA CHE DEVE SEGUIRE}}$$

NEL CASO QUINDI AD UN CERTO ISTANTE SIAMO SULLA TRAIETTORIA SI HA CHE

$$B(q_d)\ddot{q} + \cancel{n(q_d, \dot{q}_d)} = \tilde{B}(q_d)\ddot{q}_d + \cancel{\tilde{n}(q_d, \dot{q}_d)} + K_P\underbrace{(q_d - q_d)}_{0} + K_D($$

$$B(q_d)\ddot{q} = \tilde{B}(q_d)\ddot{q}_d$$

NEL CASO PERÒ AVESSIMO UNA TECNOLOGIA DA PERMETTERCI DI FARE TUTTI I CALCOLI IN LINEA

COMPUTED TORQUE $\Rightarrow$ VIENE FUORI DAL CONTROLLO A MODELLO INVERSO

~~CONSIDERIAMO IL CONTROLLO A MODELLO INVERSO~~

VIENE ANCHE CHIAMATO

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE ESATTA

SUPPONIAMO CHE IO VOGLIO UN'ACCELERAZIONE FATTA COSÌ

$$\underbrace{\ddot{q} = v(t)}_{\text{NUOVO INGRESSO}} \in \mathbb{R}^n \quad \text{CON} \quad \ddot{q} = \underbrace{M^{-1} f}_{v}$$

PENSANDO ALLO STATO COME LA COPPIA $q, \dot{q}$ OVVERO

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} v$$

POSSIAMO QUINDI DIRE CHE UNA LEGGE DI CONTROLLO PUÒ ESSERE

$$\ddot{q} = v = \ddot{q}_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q) \qquad \eta = q_d - q$$

ERRORE

QUINDI

$$\underbrace{\ddot{q}_d - \ddot{q}}_{\ddot{\eta}} + K_D \dot{\eta} + K_P \eta = 0 \Rightarrow \ddot{\eta} + K_D \dot{\eta} + K_P \eta = 0$$

$\Downarrow$

È PERFETTA POSSO FARCI TUTTO

CHIAMANDO CON

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_P & -K_D \end{bmatrix} z$$

$\hookrightarrow$ BASTA CHE SONO DEF. POS. E DIAGONALE TUTTO È STABILE

$$K_P = \begin{bmatrix} K_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_{P_n} \end{bmatrix} \qquad K_D = \begin{bmatrix} K_{D_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_{D_n} \end{bmatrix}$$

QUINDI RISCRIVENDO

$$\ddot{\eta}_i + K_{D_i} \dot{\eta}_i + K_{P_i} \eta_i = 0 \Rightarrow z_i = \begin{bmatrix} \eta_i \\ \dot{\eta}_i \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{z}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_{P_i} & -K_{D_i} \end{bmatrix} z_i$$

QUINDI POSSO LAVORARE E SCEGLIERE A PIACERE GLI AUTOV.
CAMBIANDO $K_{D,i}$ E $K_{P,i}$

QUINDI

$$\lambda_i = -\frac{1}{\tau_i} \rightarrow \lambda^2 + \lambda K_{D_i} + K_{P_i}$$

SCELGO λ_1, λ_2 E OTTENGO

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

DA CUI

$$K_{P_i} = \lambda_1 \lambda_2 > 0$$

$$K_{D_i} = -(\lambda_1+\lambda_2) > 0$$

QUINDI IN PRATICA DOBBIAMO CERCARE UN VETTORE DI INGRESSO v CHE FACCIA SI CHE IL NOSTRO ROBOT SIA RISOLVIBILE CON LA LINEARIZZAZIONE ESATTA

⇓

POI SAREBBE FATTA PERCHÈ POTREI FARE OGNI COSA ANCHE SCEGLIERE GLI AUTOVALORI

→ IL ROBOT È NON LINEARE

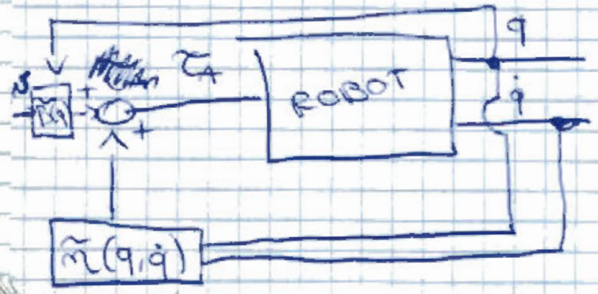
QUINDI CONSIDERIAMO LE COPPIE DA METTERE SUGLI ATTUATORI CON IL MODELLO DINAMICO INVERSO

$$\tau_A = \tilde{B}(q)v + \tilde{n}(q,\dot{q}) \Rightarrow \ddot{q} = v$$

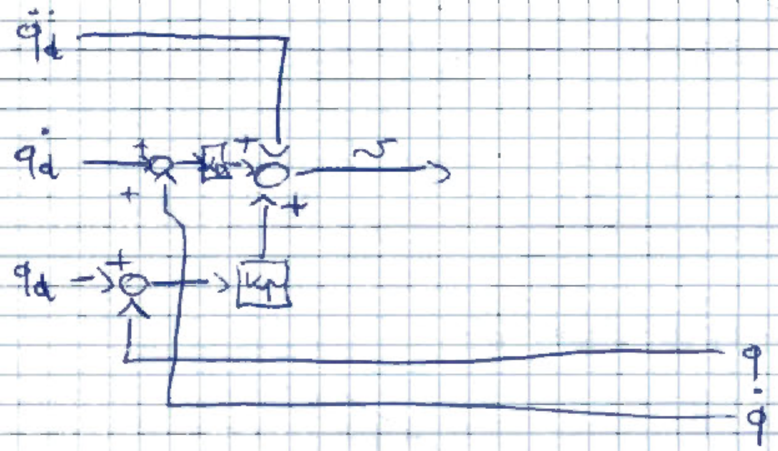
→ SE I CALCOLI SONO FATTI BENE OVVERO $\Rightarrow \tilde{B} = B$, $\tilde{n} = n$

QUINDI POSSIAMO RISOLVERE CON LA LINEARIZZAZIONE

VEDIAMO LO SCHEMA



⇒ ABBIAMO COSÌ LINEARIZZATO E DISACCOPPIATO



QUINDI RISCRIVENDO PER BENE OVVERO SOSTITUENDO v SI HA CHE

$$\tau_A = \tilde{B}(q)\underbrace{\left(\ddot{q}_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q)\right)}_{\text{ACCELERAZIONE DI RIFERIMENTO}} + \tilde{n}(q,\dot{q})$$

ANCORA SULLA COMPUTED TORQUE

21/12/201

RICORDANDO CHE NEL CASO IDEALE
CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI
$\tilde{B}(q)$ E $\tilde{m}(q,\dot{q})$ E CONSIDERIAMO CHE ABBIAMO LA CONOSCENZA PERFETTA OVVERO

$$B(q)\ddot{q} + m\cancel{(q,\dot{q})} = \tilde{B}(q)\ddot{q}_r + \tilde{m}\cancel{(q,\dot{q})}$$

$\ddot{q}_r$ ACCEL. DI RIF.

QUINDI

$$B(q)\ddot{q} = \tilde{B}(q)\ddot{q}_r \Rightarrow \ddot{q} = \underbrace{B^{-1}(q)B(q)}_{I}\ddot{q}_r = \ddot{q}_r$$

ESSENDO UGUALI

QUINDI OTTENIAMO LA NOSTRA LEGGE DI CONTROLLO

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q)$$

QUINDI OTTENIAMO CHIAMANDO L'ERRORE CON $\eta = (q_d - q)$ SI HA CHE

$$\ddot{\eta} + \dot{\eta}K_D + \eta K_P = 0 \Rightarrow \text{LINEARE}$$

$\Downarrow$ POSSIAMO FARE TUTTO

ANDIAMO A CONSIDERARE IL CASO CHE NON ABBIAMO LA CONOSCENZA PERFETTA QUINDI NON POSSIAMO FARE LE SEMPLIFICAZIONI SOPRA

$$B(q)\ddot{q} = \tilde{B}(q)\ddot{q}_r + \underbrace{(\tilde{m}(q,\dot{q}) - m(q,\dot{q}))}_{\Delta m(q,\dot{q})}$$

QUINDI

$$\Delta m(q,\dot{q}) = \tilde{m}(q,\dot{q}) - m(q,\dot{q}) \qquad \Delta B(q,\dot{q}) = \tilde{B}(q) - B(q)$$

QUINDI SOSTITUENDO

$$B(q)\ddot{q} = \left(B(q)+\Delta B(q)\right)\ddot{q}_r + \Delta m(q,\dot{q})$$

QUINDI CALCOLIAMO $\ddot{q}$ E SI HA CHE

$$\ddot{q} = B^{-1}(B+\Delta B)\ddot{q}_r + B^{-1}\Delta m = \ddot{q}_r + \left(B^{-1}\Delta B\ddot{q}_r + B^{-1}\Delta m\right)$$

PIU' AUMENTA
E PIU' IL MIO
DISTURBO CRESCE

QUINDI LA LEGGE DI CONTROLLO SARA'

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d + K_D\underbrace{(\dot{q}_d-\dot{q})}_{\dot{\eta}} + K_P(q_d-q) + d(q,\dot{q},q_d,\dot{q}_d,\ddot{q}_d)$$

SOSTITUENDO ORA η SI HA CHE

$$\ddot{\eta} + K_D\dot{\eta} + K_P\eta = -d \implies \text{BISOGNA CALIBRARE } K_D \text{ E } K_P$$

$\hookrightarrow$ DISTURBO

ORA RICORDIAMO INVECE IL CONTROLLO PURO PROP. DER.
E CONSIDERIAMO UN CONTATTO ESTERNO

$$\tau_A = K_P(q_d-q) - K_D\dot{q} + g(q) \implies \text{COMP. PERFETTA GRAVITA'}$$

DOVE

$$\tau_A = B(q)\ddot{q} + m(q,\dot{q}) + g(q)$$

CONSIDERANDOCI QUINDI LA FORZA ESTERNA

$$B(q)\ddot{q} + m(q,\dot{q}) + g(q) = \tau_A + J^T(q)\,{}^{B}F_{ER}$$

VEDIAMO COME CAMBIA L'EQUILIBRIO

$$\begin{pmatrix} q_d \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} q^* \\ 0 \end{pmatrix} \implies K_P(q_d-q^*) + J^T(q)\,{}^{B}F_{ER} = 0$$

$$K_P(q_d-q^*) = -J^T(q)\,{}^{B}F_{ER}$$

QUINDI SI HA CHE

$$q^* = q_d + K_P^{-1} J^T(q)\, {}^b F_{ER}$$

↳ K_P RIESCE A GESTIRE LA FORZA ESTERNA

⇓

MA DIPENDE ANCHE DALLA CONFIGURAZIONE DEL ROBOT

MA CERCHIAMO LE POSIZIONI CARTESIANE E NON DI GIUN

$$K_P (q_d - q^*) = -J^T(q)\, {}^b F_{ER}$$

$P_d = k(q_d)$

$P = k(q)$

$P_d - P^* = J_k(q^*)(q_d - q^*)$

↳ q PICCOLE

↳ JACOBIANO ALG.

QUINDI

$$K_P J^{-1}(q) \Delta\tilde{P} = -J^T(q)\, {}^b F_{ER}$$

$$\boxed{J^{-T}(q) K_P J^{-1}(q)} \Delta\tilde{P} = -{}^b F_{ER}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DEL ROBOT

⇓

ESSENDO COME UNA MOLLA SAREBBE PROPRIO LA RIGIDEZZA DELLA MOLLA

SE USO QUELLO GEOME

$$\Delta\tilde{P} = \begin{bmatrix} r_d - r \\ d\rho \end{bmatrix} = J(q)(q_d - q)$$

~~POSIZIONE~~ ORIENTAMENTO TRA DOVE LUI È E DOVE VOGLIAMO CHE SIA

⇒ SE PICCOLA POSSIAMO USARE EULERO

$$d\rho = \begin{bmatrix} d\rho_x \\ d\rho_y \\ d\rho_z \end{bmatrix} = \omega dt$$

↳ PICCOL

↳ ANGOLI DI EULERO

$$q_d - q = J^{-1}(q) \Delta\tilde{P}$$

POSSIAMO SCRIVERLA IN UN ALTRA FORMA INVECE CHE RIGIDEZZA MA CEDEVOLEZZA

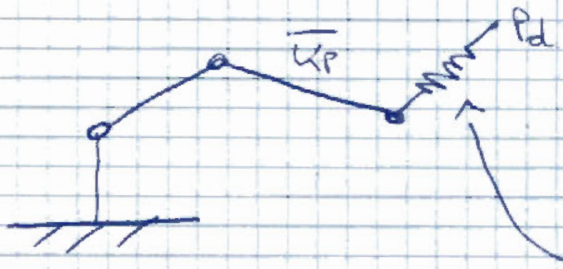
$$\Delta\tilde{P} = \boxed{-J(q) K_P^{-1} J^T(q)}\, {}^b F_{ER}$$

CEDEVOLEZZA

CERCHIAMO ADESSO DI DEFINIRE LO STESSO PROBLEMA PERÒ SOLO IN CARTESIANO

PRIMA ABBIAMO PARLATO DI PASSAGGIO DA GIUNTI A CARTESIANO ⇒ ORA CREIAMO LA LEGGE DI CONTROLLO SOLO SUL CARTESIANO

CONSIDERIAMO PERÒ CHE NON CI SIANO GLI ANGOLI DI EULERO PER SEMPLIFICARE



P_d → NON HO IL GIUNTO DES. MA LA POS. CART. DES.

⇓

IMMAGINO CHE NON CI SIA ~~UNA MOLLA PER OGNI GIUNTO~~ MA LA MOLLA È TRA L'ESTREMITÀ DEL ROBOT E P_d

QUINDI

$$^{\&}F_c = K_P(r_d - r) - K_D \dot{r} \quad \text{con } \dot{r} = J(q)\dot{q}$$

↳ FORZA DELLA MIA MOLLA VIRTUALE

QUINDI LA LEGGE DI CONTROLLO SARÀ

$$\tau_A = J^T(q) K_P (r_d - k(q)) - K_D J(q)\dot{q} + g(q)$$

CERCHIAMO ORA LA MATRICE DI CEDEVOLEZZA OVVIAMENTE SOTTO L'IPOTESI DI NON ESSERE IN SINGOLARITÀ (J INVERTIBILE)

$$0 = J^T(q) K_P (r_d - r) + J^T(q)\, ^{\&}F_c \Rightarrow \boxed{K_P(r_d - r) = -^{\&}F_c}$$

RIGIDEZZA

↳ PER L'EQUILIBRIO $B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) + g(q)$

$B(q)\ddot{q}$ ⇒ VA A ZERO

$n(q,\dot{q})$ ⇒ VA A ZERO

$g(q)$ ⇒ COMP.

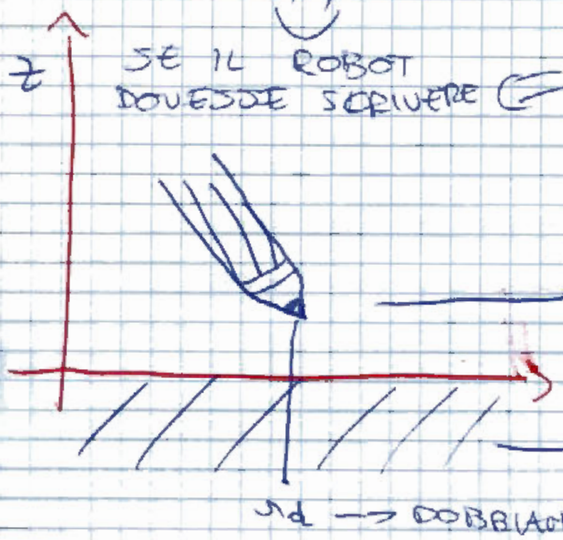
⇓

SIAMO ARRIVATI NELLA POS. DESIDERATA

$$\boxed{r_d - r = K_P^{-1}\, ^{\&}F_c}$$

CEDEVOLEZZA

SE IL ROBOT DOVESSE SCRIVERE ⇐



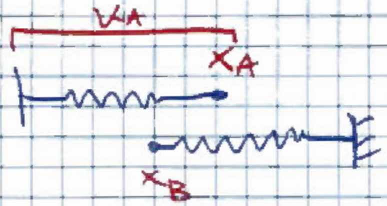
→ IN ORIZZONTALE POSSO AVERE UN ERRORE GRANDE PERCHÉ DEVO ~~SPOSTARMI MOLTO~~

→ IN VERTICALE OVVERO SU z DEVO STARE ATTENTO

r_d → DOBBIAMO PORTARE LA POS. DES. SOTTO ~~AL NOSTRO OBIETTIVO~~

~~L'ERRORE DEVE~~ ESSERE PICCOLO COSÌ DA CORREGGERE MAN MANO FINO AL CONTATTO ⇐ ~~SE C'È CONTATTO E~~ IL ROBOT SI ~~ACCORGE CHE NON SI~~ MUOVE SMETTE DI ANDARE GIÙ

CONSIDERIAMO ORA



$F_A = K_A(x_A - x)$

$F_B = +K_B(x_B - x)$

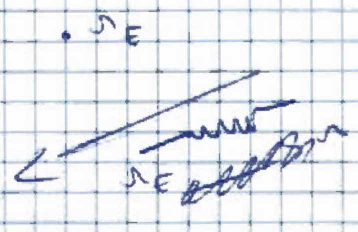
CERCHIAMO x_E E K_E DI EQUILIBRIO $\Rightarrow F_A + F_B = 0$

$$-K_A(x_A - x_E) = K_B(x_B - x_E)$$

$$K_A x_A - K_B x_B = (K_A + K_B)x_E$$

NEL CASO DI UNA MOLLA TRIDIMENSIONALE E QUINDI IL RO

K_E



AMBIENTE SUL ROBOT

$\Rightarrow F_{ER} = K_E(r_E - r)$

$F_{RE} = K_P(r_d - r)$

ROBOT SULL'AMBIENTE

COME PRIMA

$F_{ER} + F_{RE} = 0$

QUINDI

$$K_P(r_d - r^*) + K_E(r_E - r^*) = 0$$

$$K_P(r_d) + K_E r = K_P r^* + K_E r^*$$

$$r^* = (K_P + K_E)^{-1}(K_P r_d + K_E r_E)$$

TELEMANIPOLATORI

LE TRAIETTORIE NON SONO PIÙ GENERATE DA UN MANIPOLATORE ELETTRONICA MA VENGONO COPIATE DA UN MANIPOLATORE UMANO