

**12/02/2009 – COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI**

**Esercizio 1.** Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s + 5}{s(s^2 + 121)}$$

Si ponga il sistema in controreazione unitaria, con un guadagno variabile  $K$  in catena aperta. Si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e si calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di  $K \in \mathbb{R}$  utilizzando il criterio di Nyquist. *Facoltativo: verificare il risultato utilizzando il criterio di Routh.*

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a tempo discreto:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1 \quad 0].$$

- i) Discutere le proprietà dei modi naturali;
- ii) determinare l'evoluzione dell'uscita in corrispondenza dei seguenti stato iniziale  $x(0)$  e ingresso  $u(t)$

$$x^T(0) = [-1 \quad 1 \quad 0], \quad u(t) = -\delta_{-1}(t);$$

- iii) calcolare la funzione di trasferimento;
- iv) calcolare la risposta a regime permanente (se esiste) per l'ingresso  $u(t) = \sin(3t) + \delta_{-1}(t)$ .

**Esercizio 3.** Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

- i) Trovare un'opportuna trasformazione di coordinate che trasformi la matrice  $A$  in una matrice diagonale a blocchi di Jordan;
- ii) calcolare l'esponenziale di matrice  $e^{At}$ .

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente sistema lineare a tempo continuo stazionario rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

- i) Discutere le proprietà strutturali del sistema; in particolare modo si dica (motivando la risposta) se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

- ii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;
- iii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;
- iv) si determini un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

**NB:**

- Gli studenti di “Teoria dei Sistemi (9 CFU)” svolgono 1), 2), 4)
- Gli studenti di “Teoria dei Sistemi I (6 CFU)” svolgono 1) + 2)
- Gli studenti di “Teoria dei Sistemi II (6 CFU)” svolgono 3) + 4)

**TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 2 ORE – LIBRI CHIUSI.**