02/02/2010 – COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

Esercizio 1. Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s-80}{s(s+1)(s+10)}$$

Si ponga il sistema in controreazione unitaria, con un guadagno variabile K in catena aperta. Si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e si calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di $K \in \mathbb{R}$ utilizzando il criterio di Nyquist.

Facoltativo: verificare il risultato utilizzando il criterio di Routh.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Discutere le proprietà dei modi naturali;
ii) determinare per quale stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera dell'uscita risulta pari a: $y_{\text{lib}}(t) = e^{-2t}$;
iii) calcolare la funzione di trasferimento;
iv) determinare l'evoluzione dell'uscita in corrispondenza dei seguenti stato iniziale $x(0)$ e ingresso $u(t)$

$$x^T(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \sin(t) + \cos(t);$$

v) calcolare la risposta a regime permanente (se esiste !!!) per l'ingresso $u(t) = -2\sin(3t)$.
Si consiglia di svolgere l'esercizio utilizzando la trasformata di Laplace.

Esercizio 3. Sia dato il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t)x_2(t) - x_1^3(t) + kx_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t) - x_2(t) \end{cases}$$

i) verificare che l'origine è un punto di equilibrio;
ii) discutere la stabilità dell'origine al variare del parametro k.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sistema lineare a tempo continuo stazionario rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Discutere le proprietà strutturali del sistema; in particolar modo si dica (motivando la risposta) se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

ii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;
iii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;
iv) si determini un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

NB:

- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi (9 CFU)" svolgano i punti 1), 2), 3), 4-i)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi I (6 CFU)" svolgano i punti 1), 2)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi II (6 CFU)" svolgano i punti 3), 4)**

TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 2 ORE – LIBRI CHIUSI.