# 23/11/2010 – COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

**Esercizio 1.** Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s-20}{s(s+10)^2}$$

Si ponga il sistema in controreazione unitaria, con un guadagno variabile $K$ in catena aperta. Si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e si calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di $K \in \mathbb{R}$ utilizzando il criterio di Nyquist.

*Facoltativo: verificare il risultato utilizzando il criterio di Routh.*

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a **tempo continuo**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

i) Discutere le proprietá dei modi naturali;
ii) calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera del sistema è: $y_{\text{lib}}(t) = e^t \cos(t)$;
iii) calcolare la funzione di trasferimento e la risposta del sistema al gradino unitario.

**Esercizio 3.** Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

i) Trovare un'opportuna trasformazione di coordinate che trasformi la matrice $A$ in una matrice diagonale a blocchi di Jordan;
ii) calcolare l'esponenziale di matrice $e^{At}$.

**Esercizio 4.** Sia dato il seguente sistema lineare a tempo continuo stazionario rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Discutere le proprietà strutturali del sistema; in particolar modo si dica (motivando la risposta) se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^T, \qquad x_2 = [0\ 1\ 0\ 0]^T \qquad x_3 = [0\ 0\ 1\ 0]^T, \qquad x_4 = [0\ 0\ 0\ 1]^T, \qquad x_5 = [1\ 0\ 1\ 0]^T$$

ii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;
iii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;
iv) si determini un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

**NB:**

- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi (9 CFU)" svolgano i punti 1), 2), 4-i)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi I (6 CFU)" svolgano i punti 1), 2)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi II (6 CFU)" svolgano i punti 3), 4)**

**TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 2 ORE – LIBRI CHIUSI.**