TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 10-07-2012

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = \frac{2K}{s(s+0.5)(s+18)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli per quali valore della pulsazione ω la fase di $W(j\omega)$ è esattamente pari a $\pm\pi$;
4. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.
   in particolare, si dica per quale intervallo di valori di K il sistema a ciclo chiuso è stabile asintoticamente.

Problema 2. Si consideri la seguente rappresentazione esplicita di un sistema lineare a tempo continuo

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau,$$
$$y(t) = Cx(t),$$

dove

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \Phi(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{bmatrix}, \quad H(t) = 2\,e^{-t}\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{bmatrix}.$$

1. Si calcolino le matrici A e B della rappresentazione implicita del sistema;
2. Con $C = [0\ 1]$, si calcoli la funzione di trasferimento ingresso-uscita del sistema.

Problema 3. Dato il sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente riposta impulsiva

$$w(t) = 5\,e^{-2t},$$

1. si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(3t)$.

Problema 4. Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

si trovi una base per lo spazio degli stati raggiungibili $\mathcal{P}$, una base per lo spazio degli stati inosservabili $\mathcal{Q}$ ed una base per l'intersezione $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k\,x_2 - x_1(x_2^2 + 2x_1^2) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1 - x_2^3, \end{cases}$$

Si studi la stabilità dell'origine al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

Gli studenti del corso di Teoria dei Sistemi I (6 CFU) devono rispondere ai quesiti 1, 2 e 3.
