

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 23-01-2013

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K \frac{1}{s^2(s+2)^2}.$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At} ;
3. Si calcoli la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Problema 3. Dato il sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = e^{-2t} \cos(t),$$

si calcolino la funzione di trasferimento e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(3t)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$

Si trovi una base per lo spazio degli stati raggiungibili e una base per lo spazio degli stati inosservabili. Inoltre, si individuino i 4 sottospazi \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{X}_3 e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman.

Problema 5. Sia dato un sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ed una funzione quadratica $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$ con

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che l'origine è asintoticamente stabile e che la $V(x)$ è una funzione di Lyapunov.

Problema 6. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(x_2(t) + 2) + kx_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t) - x_2(t) - 2. \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, -2)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$ usando sia il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, sia il metodo di Lyapunov (si utilizzi una funzione quadratica).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

Gli studenti del corso di Teoria dei Sistemi I (6 CFU) devono rispondere ai quesiti 1, 2 e 3.
